
Mathematische Methoden – Blatt 12

Wintersemester 2021/22

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 01.02.2022, 23:59 Uhr

49. Zur Diskussion

0 Punkte

- Welche Erhaltungsgrößen sind bei der Betrachtung von Teilchen wichtig, die sich in einem isotropen Zentralkraftfeld bewegen?
- Warum findet die Bewegung solcher Teilchen vollständig in einer Ebene statt?
- Was ist das effektive Potenzial, und warum ist es nützlich?
- Welche Form haben gebundene Planetenbahnen im Gravitationsfeld der Sonne?

50. Runge-Lenz Vektor

3+2+3=8 Punkte

Bei der Betrachtung von Teilchen in einem isotropen Zentralkraftfeld mit Potential $U(r) = -\frac{\gamma}{r}$ ist der folgende Vektor nützlich:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{m\gamma}{r} \vec{r},$$

wobei \vec{r} die Bahnkurve des Teilchens ist, \vec{p} und \vec{L} dessen Impuls und Drehimpuls, und m dessen Masse.

- Zeigen Sie, dass \vec{A} erhalten ist. **Hinweis:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$
- Warum liegt \vec{A} in der Ebene der Bewegung des Teilchens?
- Bestimmen Sie mithilfe des Skalarproduktes $\langle \vec{A}, \vec{r} \rangle$ die Bahn des Teilchen im Kraftfeld als Funktion $r(\varphi)$. **Hinweis:** $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle$

51. Kreisbahnen im Zentralkraftfeld

1+5+3+5+3=17 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein Teilchen mit Drehimpuls $l \neq 0$ und Masse m in einem isotropen Potenzial mit positiven reellen Konstanten α und β ,

$$U(r) = -\frac{\beta}{r^\alpha}.$$

- Wie lautet das effektive Potenzial zu $U(r)$?
- Skizzieren Sie das effektive Potenzial jeweils für $\alpha = 1$ und $\alpha = 3$. Beschreiben Sie qualitativ das mögliche Verhalten von dem Teilchen in diesen beiden Potenzialen.
- Im Folgenden interessieren uns vor allem geschlossene Kreisbahnen, $r = \text{const}$. Argumentieren Sie, dass solche Bahnen in einem effektiven Potential möglich sind, wenn es lokale Extremstellen hat. Wann sind Kreisbahnen stabil, und wann instabil?
- Betrachten Sie $U(r)$ erst für $\alpha \neq 2$. Für welche Werte von α existieren stabile Kreisbahnen, für welche instabile?

- e) Betrachten Sie jetzt den Spezialfall $\alpha = 2$. Für welchen Wert von β existieren Kreisbahnen?
Sind diese stabil?