Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
T. Schmitz

Mathematische Methoden – Blatt 3

Wintersemester 2021/22

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 09.11.2021, 23:59 Uhr

9. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist der euklidische Raum? Worin unterscheidet er sich von einem Vektorraum?

b) Was sind Polarkoordinaten? Was sind Zylinder- und Kugelkoordinaten?

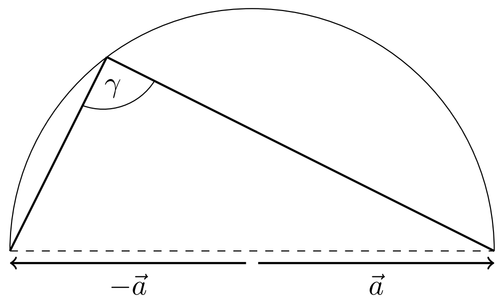
c) Was ist eine reelle Funktion?

d) Was ist die Ableitung einer Funktion?

10. Satz des Thales *1+3=4 Punkte*

a) Geben sie den Satz des Thales an.

b) Beweisen Sie den Satz des Thales mithilfe des Skalarprodukts. Als Inspiration diene die nebenstehende Skizze.



11. Skalarprodukt in einem Funktionenraum *1+3+3=7 Punkte*

In dieser Aufgabe betrachten wir quadratintegrierbare reelle Funtionen auf dem Intervall $[-1, 1]$, d.h. solche Funktionen, die

$$\int_{-1}^{1} dx\; f(x)^2 < \infty$$

erfüllen. Diese bilden den Vektorraum $L^2_{[-1,1]}$.

a) Was ist der Nullvektor in $L^2_{[-1,1]}$?

b) Wir definieren die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2_{[-1,1]} \times L^2_{[-1,1]} \to \mathbb{R};\; (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle \equiv \int_{-1}^{1} dx\; f(x)\, g(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2_{[-1,1]}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$ und $g(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\, x^2$ aus $L^2_{[-1,1]}$ normiert und orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

12. Geometrie im euklidischen Raum

3+3=6 Punkte

a) Betrachten Sie ein Dreieck mit den Eckpunkten P, Q und R. Der Schwerpunkt S des Dreiecks ist gegeben durch $\vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_P + \vec{r}_Q + \vec{r}_R)$, wobei $\vec{r}_M$ der Ortsvektor zum Punkt M sei. Zeigen Sie, dass der Punkt S tatsächlich in der Ebene des Dreiecks liegt.

b) Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Summe der Längen von zwei Seiten eines Dreiecks immer gleich oder größer als die Länge der dritten Seite ist. Beweisen Sie dies mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung, die besagt, dass $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$.

13. Koordinatensysteme im euklidischen Raum

5+4=9 Punkte

a) Skizzieren Sie hier die jeweils angegebenen Teilmengen der euklidischen Ebene.

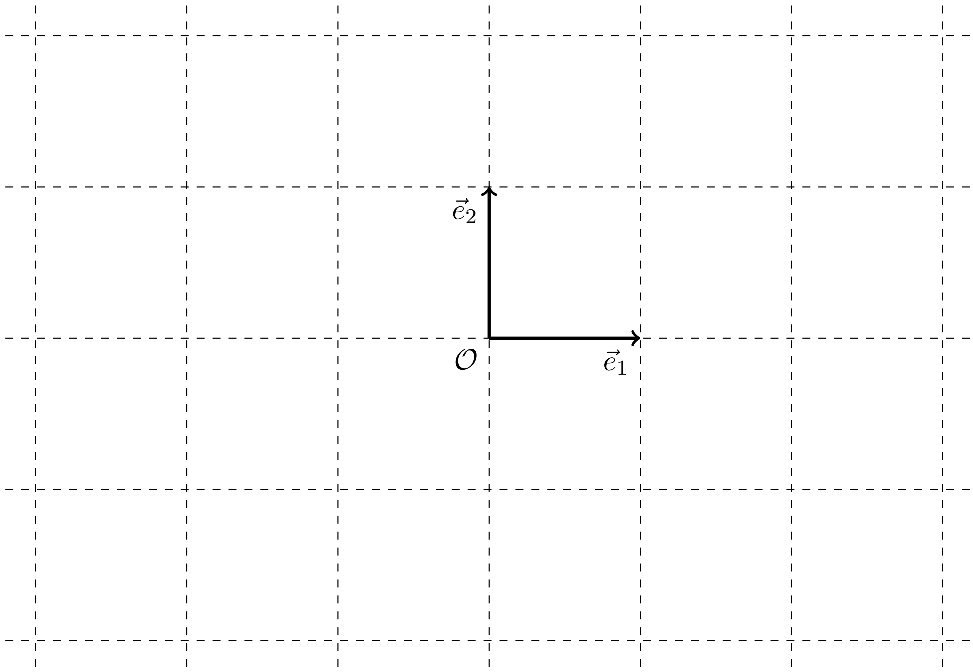
(i) Punkte mit kartesischen Koordinaten $-3 \leq x_1 \leq -2$ und $-2 \leq x_2 \leq -1$.

(ii) Punkte mit kartesischen Koordinaten $2 \leq x_1 \leq 3$ und $-2 \leq x_2 \leq -x_1 + 1$.

(iii) Punkte mit Polarkoordinaten $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$.

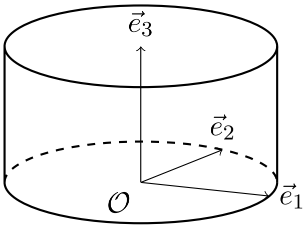
(iv) Punkte mit Polarkoordinaten $1 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(v) Punkte mit Polarkoordinaten $0 \leq r \leq 1$ und $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$.

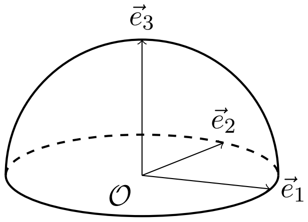


b) Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen des E_3 in geeigneten Koordinaten.

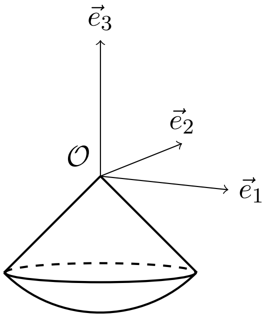
(i)



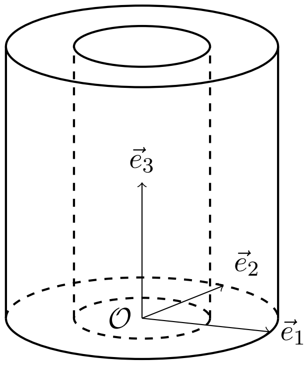
(ii)



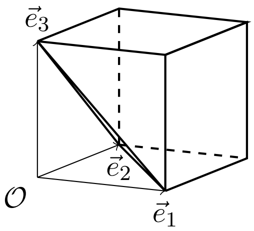
(iii)



(iv)



(v) **Bonus:**



14. Ableitungen aus dem Funktionsgraphen *4 Punkte*

Skizzieren Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen: