
Mathematische Methoden – Blatt 4

Wintersemester 2021/22

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 16.11.2021, 23:59 Uhr

15. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist die Taylor-Entwicklung einer Funktion?
- b) Was ist die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion?
- c) Was ist eine partielle Ableitung einer Funktion in n Variablen?
- d) Was ist der Gradient einer Funktion in n Variablen?

16. Taylor-Entwicklung

7+3+2=12 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung um $x = 0$ von...
 - (i) ... $\sin x$ bis zur dritten Ordnung.
 - (ii) ... $\cos x$ bis zur zweiten Ordnung.
 - (iii) ... $\sqrt{1+x}$ bis zur zweiten Ordnung. Skizzieren Sie die Funktion und ihre Taylor-Entwicklung bis zur nullten, ersten und zweiten Ordnung.
- b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \ln(1-x)$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

die Taylor-Reihe von $f(x)$ um $x = 0$ ist.

- c) Beweisen Sie mithilfe $x = e^{\ln x}$ und dem Ergebnis aus Aufgabenteil b), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha},$$

wobei α eine reelle Konstante ist.

17. Gradient I

2+3=5 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2.$$

- a) Skizzieren Sie die Konturlinie $f(x, y) = 1$.
b) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y)$, und zeichnen Sie den Vektor $\text{grad} f(x, y)$ an den Punkten $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$ und $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in die Skizze aus Aufgabenteil a) ein. Überzeugen Sie sich, dass der Gradient an diesen Punkten senkrecht zur Konturlinie steht.

18. Gradient II

8 Punkte

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

$$e(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle, \quad f(\vec{x}) = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle^2}, \quad g(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad h(\vec{x}) = \frac{1}{2}k|\vec{x}|^2.$$

Hierbei ist $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, k eine positive reelle Konstante und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.