Mathematische Methoden – Blatt 5

Wintersemester 2021/22

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 23.11.2021, 23:59 Uhr

19. Zur Diskussion

0 Punkte

- Was ist eine vektorwertige Funktion?
- Wie bestimmt man die Ableitung einer vektorwertigen Funktion?
- Was ist eine Bahnkurve?
- Was sind die momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Bahnkurve?
- Was ist die lokale Basis eines Koordinatensystems?

20. Bahnkurven I

2+2+3=7 Punkte

Betrachten Sie eine Bahnkurve in Kugelkoordinaten mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ und den Konstanten R und ω :

$$\begin{aligned}r(t) &= R = \text{const.}, \\ \vartheta(t) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cos(4\omega t), \\ \varphi(t) &= \omega t.\end{aligned}$$

- Skizzieren Sie die oben angegebene Bahnkurve.
- Zeichnen Sie grob die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ der Bahnkurve für verschiedene t in ihre Skizze ein. Überzeugen Sie sich davon, dass die Geschwindigkeit immer senkrecht zu $\vec{e}_r$ steht.
- Zeigen Sie im Allgemeinen, dass die Geschwindigkeit einer Bahnkurve auf einer Kugeloberfläche, $r(t) = R = \text{const.}$, immer senkrecht zu $\vec{e}_r$ steht. **Hinweis:** $R^2 = \langle \vec{r}(t), \vec{r}(t) \rangle$

21. Bahnkurven II

4+4+2=10 Punkte

Bezüglich einer ONB $B := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ seien zwei Bahnkurven

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &= R \cos(\omega t) \vec{e}_1 + R \sin(\omega t) \vec{e}_2 = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_2(t) &= vt \sin(\omega t) \vec{e}_1 + vt \cos(\omega t) \vec{e}_2 + vt \vec{e}_3 = vt \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

gegeben. Hierbei sind R , ω und v konstante Parameter und $t \in \mathbb{R}$ der Zeitparameter.

- Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven. Zeichnen Sie für die zweite Bahn zunächst die Projektion auf die $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene, skizzieren Sie dann grob die Bewegung in drei Dimensionen.

- b) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$ für beide Bahnkurven.
- c) Zeichnen Sie jeweils für $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ und $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$ den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor ein.

22. Lokale Basen

3+5=8 Punkte

- a) Betrachten Sie den Ortsvektor in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die entsprechende lokale Basis gegeben ist durch

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Jetzt betrachten wir die Koordinaten (η, φ) , $\eta > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, in denen man den Ortsvektor in zwei Dimensionen ausdrücken kann als

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta^2 + a^2} \cos \varphi \\ \eta \sin \varphi \end{pmatrix},$$

wobei a eine positive Konstante ist.

- (i) Wie verhalten sich η und φ für den Spezialfall $a = 0$?
- (ii) Skizzieren Sie für $a \neq 0$ die Konturlinie $\eta = a$, und die Konturlinie $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- (iii) Bestimmen Sie analog zu Aufgabenteil a) die lokale Basis zu (η, φ) . Zeichnen Sie die Basisvektoren am Punkt $\eta = a$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in ihre Skizze ein.