
Mathematische Methoden – Blatt 6

Wintersemester 2021/22

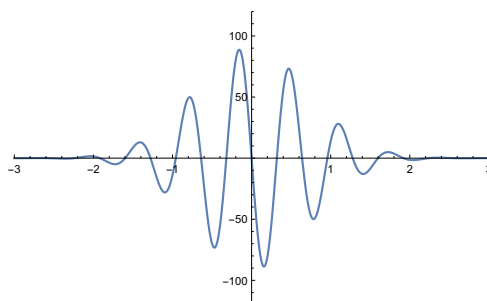
Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 30.11.2021, 23:59 Uhr

23. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist eine Stammfunktion einer Funktion? Was ist ein bestimmtes Integral einer Funktion?
b) Warum verschwindet das Integral von $-a$ bis a der folgenden Funktion?



- c) Warum verschwinden folgende Integrale?

$$\int_{-a}^a \sin(x)e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \cos^3(\omega t) dt, \quad \int_0^{8\pi} \frac{d}{dx} \left(x \sin^2(x) e^{-x^2} \right) dx.$$

- d) Wie bestimmt man ein Wegintegral über ein Vektorfeld? Geben Sie ein Beispiel für eine physikalische Größe, die mithilfe eines solchen Wegintegrals berechnet werden kann.

24. Integrale und Stammfunktionen I

2+2+2=6 Punkte

- a) Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) + x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos^2(x)$ ist.
b) Lösen Sie das folgende Integral durch die Substitution $x = \sin(y)$, und mithilfe von Aufgabenteil a).

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

- c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $\sqrt{1-x^2}$ von -1 bis 1 . Können Sie ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b) anhand des Graphen erklären?

25. Integrale und Stammfunktionen II

3+6=9 Punkte

- a) Finden Sie Stammfunktionen von $f(x) = \sin(kx)$, $g(x) = e^{\lambda x}$, und $h(x) = \cot(x)$, mit den Konstanten k und λ .
- b) Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei a und b konstant sind.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin(x) \, dx, & \quad \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \, dx, & \quad \int_a^b (1+x)e^x \, dx, \\ \int_{-a}^a \cos(x) \sin(x) \, dx, & \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx, & \quad \int_{-\infty}^0 x^7 e^{-x^4} \, dx. \end{aligned}$$

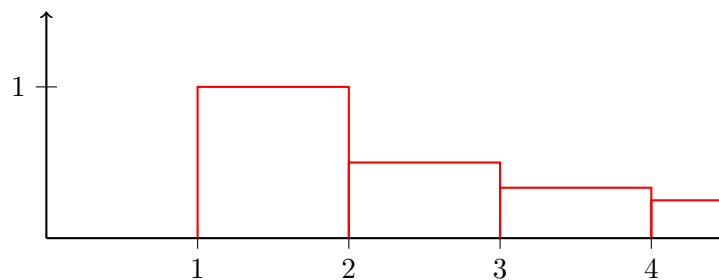
26. Abschätzung einer Reihe mit einem Integral

1+2+2=5 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die Reihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- a) Wo findet sich die Reihe S in der folgenden Skizze wieder?



- b) Zeichnen Sie die Funktion $\frac{1}{x}$ in die Skizze ein. Argumentieren Sie, dass

$$S > \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx.$$

- c) Zeigen Sie nun mithilfe von Aufgabenteil b), dass S nicht endlich ist.

27. Wegintegral

5 Punkte

Ein Weg c durchlaufe in der xy -Ebene $3/4$ eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$. Der Weg beginne bei $(2R, 0, 0)$ und ende bei $(R, -R, 0)$. Skizzieren Sie c und bestimmen Sie das Wegintegral $\int_c \vec{A} d\vec{l}$ für das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$.