
Mathematische Methoden – Blatt 7

Wintersemester 2021/22

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Abgabe: Dienstag, den 7.12.2021, 23:59 Uhr

28. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Wie berechnet man die Oberfläche einer Kugel mit Radius R mit einem Flächenintegral?
Wie berechnet man das Volumen einer Kugel mit Radius R mit einem Volumenintegral?
- b) Wie bestimmt man den Fluss eines Vektorfeldes $\frac{I_0}{4\pi r^2} \hat{r}$ durch eine Kugel mit Radius R ?

29. Weglänge

2+2+3=7 Punkte

Betrachten Sie einen Weg in der Ebene beschrieben durch

$$\vec{r}(t) = e^{kt} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ und den Konstanten k und $\omega > 0$.

- a) Wir betrachten zuerst $k = 0$. Skizzieren Sie den Weg für diesen Fall, und bestimmen Sie die Weglänge für $0 \leq t < \frac{2\pi}{\omega}$.
- b) Skizzieren Sie den Weg für $k > 0$ und $k < 0$. Für jeweils welches t erreicht die Kurve den Ursprung?
- c) Bestimmen Sie die Länge des Weges von $t = 0$ zum Ursprung.

30. Volumenintegrale mit dem Zylinder

7 Punkte

Betrachten Sie einen Zylinder Z mit Höhe h , Radius R , und konstanter Dichte ϵ . Bestimmen Sie mithilfe von Volumenintegralen dessen Masse $M = \int_Z \epsilon dV$ und Trägheitsmoment $I = \int_Z \epsilon d_{\perp}^2 dV$ bzgl. der Symmetrieachse, wobei $d_{\perp}$ den Abstand jedes Punktes im Zylinder zur Symmetrieachse angibt.

31. Volumen- und Flächenintegrale

5 + 6 = 11 Punkte

a) Betrachten Sie eine Fläche mit der Parametrisierung

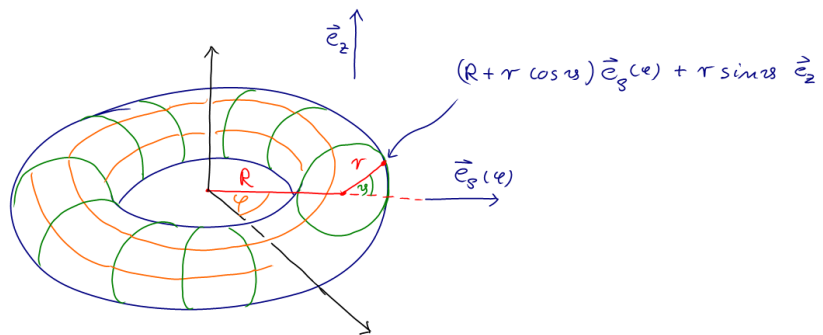
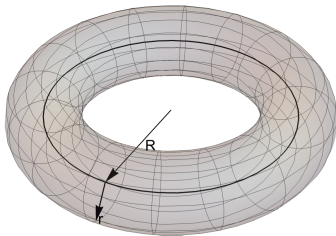
$$\vec{r}(u, \varphi) = \begin{pmatrix} (1-u) \cos(\varphi) \\ (1-u) \sin(\varphi) \\ u \end{pmatrix}, \quad (2)$$

mit $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(i) Skizzieren Sie die Fläche.

(ii) Berechnen Sie ihren Flächeninhalt mit einem Flächenintegral.

b) Die Rotation eines Kreises mit Radius r längs eines zweiten Kreises mit Radius $R > r$ definiert eine Fläche, einen *Torus*. Das durch diese Fläche eingeschlossene Volumengebiet ist der entsprechende *Volltorus*.



- (i) Parametrisieren Sie einen Volltorus mit Radien R und r (wobei $R > r$). Lassen Sie sich dabei von den Skizzen inspirieren.
- (ii) Berechnen Sie anhand Ihrer Parametrisierung mit einem Volumenintegral das Volumen des Volltorus.
- (iii) Was ist das Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe $2\pi R$? Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (ii).