

## Mathematische Methoden – Blatt 8

*Wintersemester 2021/22*

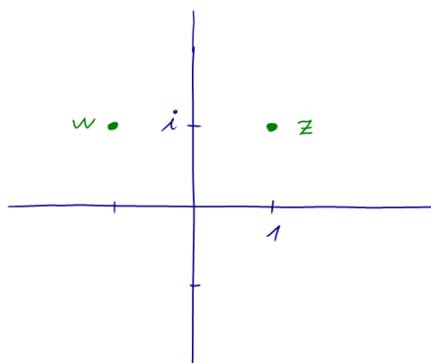
**Webpage:** [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth\\_21.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_21.html/)  
[https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_4280631.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html)

**Abgabe:** Dienstag, den 14.12.2021, 23:59 Uhr

### 32. Zur Diskussion

0 Punkte

- Was ist die Euler-Identität, und wie kann man sie herleiten?
- Warum ist  $i^2 = -1$ ,  $\frac{1}{i} = -i$ , und  $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ ?
- In der komplexen Ebene sind die komplexen Zahlen  $w$  und  $z$  eingetragen. Tragen Sie ebenso folgende komplexe Zahlen ein:  $z^*$ ,  $w + z$ ,  $wz$ ,  $z^*z$ ,  $\frac{1}{2}(z \pm z^*)$ ,  $\frac{1}{z}$ .



### 33. Komplexe Zahlen

6+4+6=16 Punkte

- a) Bestimmen Sie  $z^*$ ,  $|z|$ ,  $\text{Re}(z)$  und  $\text{Im}(z)$  für

$$z_1 = a - ib, \quad z_2 = \frac{1}{ib}, \quad z_3 = (a + ib)(a - ib),$$

$$z_4 = (a + ib)^2, \quad z_5 = \sqrt{-25}, \quad z_6 = \frac{1}{a + ib} \text{ mit } a \neq 0,$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- Es seien  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c + id$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $c \neq 0$ . Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  und  $z_1/z_2$ .
- Zeichnen Sie die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 3 e^{3i\pi/2}, \quad z_3 = i, \quad z_4 = 2, \quad z_5 = -2 + i, \quad z_6 = z_5^*$$

in die komplexe Ebene ein. Geben Sie die Zahlen auch in der jeweils fehlenden Darstellung an, entweder als  $a + ib$  oder  $|z| e^{i\phi}$ .

- d) **Bonus:** Bestimmen Sie  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{444}$  und  $i^i$ .

### 34. Euler Identität I

2+3+2=7 Punkte

Im Folgenden seien  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- a) Stellen Sie  $\cos(x)$  und  $\sin(x)$  durch komplexe Exponentialfunktionen dar.
- b) Zeigen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Teil a), dass

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x .$$

- c) Zeigen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Teil a):

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y). \end{aligned}$$

### 35. Euler Identität II

2+2=4 Punkte

- a) Bestimmen Sie:

$$\int_0^{\infty} e^{(-a+ik)x} dx \quad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+).$$

- b) Bestimmen Sie mittels a) und Euler-Identität:

$$\int_0^{\infty} \cos(kx) e^{-ax} dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(kx) e^{-ax} dx \quad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+).$$