Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Mathematische Methoden – Lernstandkontrolle

Wintersemester 2021/22

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4280631.html

Hinweis: Diese Sammlung einiger klausurtypischer Aufgaben zum Inhalt des
1. Drittels der Vorlesung soll Ihnen zur Kontrolle des Lernstands dienen.

19. Kurzfragen

a) Weshalb können Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Vektoren aufgefasst werden?

b) Was ist ein *euklidischer* Vektorraum?

c) Wie bestimmen Sie die orthogonale Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen anderen Vektor $\vec{b}$? ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien Vektoren eines euklidischen Vektorraums).

d) Wie berechnen Sie das Volumen eines Parallelepipeds mit Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$?

e) Wie lautet die lineare Näherung einer Funktion $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ um $\vec{r} = 0$?

f) Nenn Sie zwei allgemeine Eigenschaften des Gradienten.

g) Was ist der Gradient der Funktion $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$?

20. Raute

Beweisen Sie mittels Vektorrechnung: Die zwei Diagonalen einer Raute (d.h. eines Parallelogramms mit gleichlangen Seiten) schneiden sich immer im rechten Winkel.

21. Pythagoras

Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mittels Skalarprodukt.

22. Orthonormalbasis

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ sei eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektrorraums V. Eine weitere Orthonormalbasis $B' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ sei gegeben durch

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}_B \quad , \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}_B \quad , \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}_B \quad , \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}_B \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{f}_2$ orthogonal zu $\vec{f}_3$ ist.

b) Stellen Sie den Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

in Komponenten bzgl. Basis B dar.

c) Stellen Sie den Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B}$$

in Komponenten bzgl. Basis B' dar.

23. Fläche eines Dreiecks

Die Eckpunkte eines Dreiecks im Raum seien durch die kartsesischen Koordinaten $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ und $(3, 2, 1)$ gegeben. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

24. Kugelkoordinaten

Die Punkte A und B im Raum seien durch Kugelkoordinaten $(r, \vartheta, \varphi)_A = (2, \frac{\pi}{4}, 0)$ bzw. $(r, \vartheta, \varphi)_B = (5, \frac{3\pi}{4}, \pi)$ gegeben. Welchen Abstand haben die zwei Punkte?

25. Lokale Basis

Die kartesischen Koordinaten eines Punktes mit Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) sind bekanntlich

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \, \sin\vartheta \\ \sin\varphi \, \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie hieraus die lokale Basis $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$.

26. Kugelschale

Ein Teilchen bewege sich auf einer Kugelschale mit Mittelpunkt im Ursprung o. Zeigen Sie, dass zu jedem Zeitpunkt t der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ des Teilchens (bzgl. o) senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Teilchens steht.

27. Bahnkurve

Die ebene Bahn eines Teilchen werde durch folgenden zeitabhängigen Ortsvektor beschrieben:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ \frac{1}{2} R \sin(\omega t) \end{pmatrix} .$$

Hierbei sind R und ω positive Konstanten.

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve für $R = 1$.

b) Bestimmen Sie momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens.

c) Zu welchen Zeiten $0 \leq t < \frac{2\pi}{\omega}$ steht die Geschwindigkeit senkrecht zur Beschleunigung?

28. Gradient

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(\vec{r}) = r^2 + \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle, \qquad g(\vec{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \qquad h(\vec{r}) = 2xy + z^2 \,.$$

($\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant.)

29. Taylorentwicklung

Entwickeln Sie folgende Funktionen bis einschließlich 3. Ordnung um $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad g(x) = \sqrt{1+x}, \qquad h(x) = \cos(x) \,.$$