Mathematische Methoden

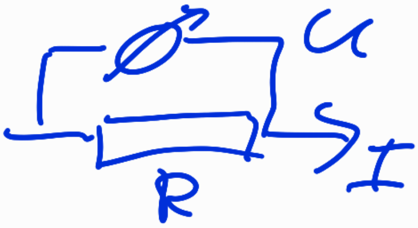
(Lehramt)

Themen:
- Vektoren
- Koordinatensysteme
- Analysis: Funktion, Ableitung, Integral (in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$)
- komplexe Zahlen
- Differenzialgleichungen
- Vektoranalysis

wozu <u>Mathematik</u>?

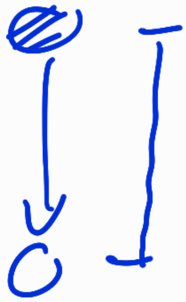
(a) Physik ist <u>quantitative</u> Wissenschaft!

Ohmsches Gesetz:



$$U = RI$$

freier Fall:



$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

(b) physikalische Konzepte (und Theorien!) i.d.R. nur mittels mathematischer Strukturen formulierbar!

- Energie: erzeugende Fkt der Zeit-translation!
- Entropie: (S) (thermodynamisch) $$dS := \frac{\delta Q}{T}$$
- quantenmechanische Überlagerung von Zuständen:

Spin up: "$\uparrow$" : ψ_1

Spin down: "$\downarrow$" : ψ_2

Vektoren!

$$\text{"}\uparrow + \downarrow\text{"} \overset{!}{=} \psi_1 + \psi_2$$

"Mathematik ist die Sprache der Physik!"

→ dazu nötig:

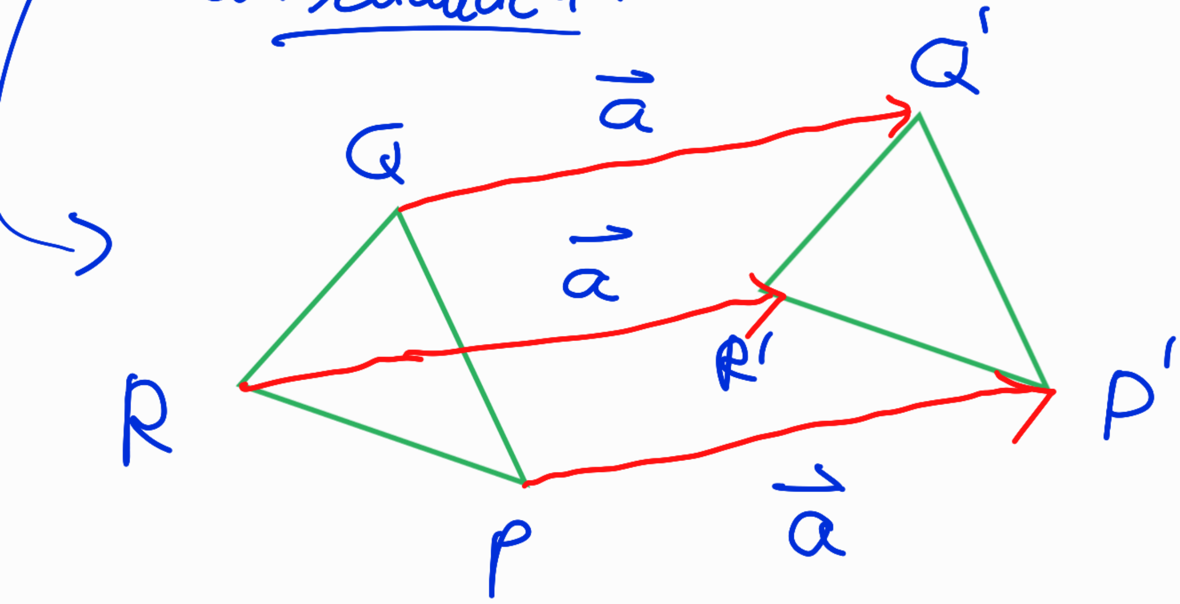
$\boxed{\text{Vokabeln lernen!}}$

Vektoren und Vektorräume

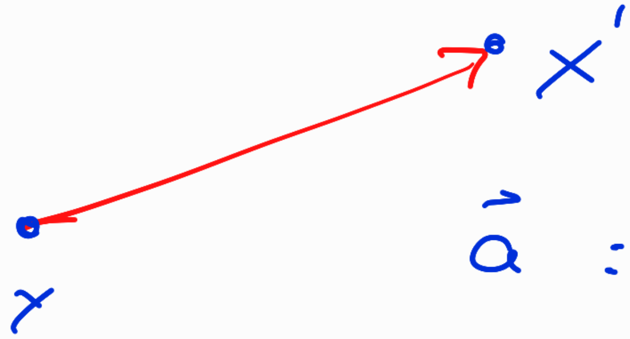
hier: Translation als Prototyp eines Vektors

Translation = Parallelverschiebung ← anschaulich!

Vektor ← abstrakt!

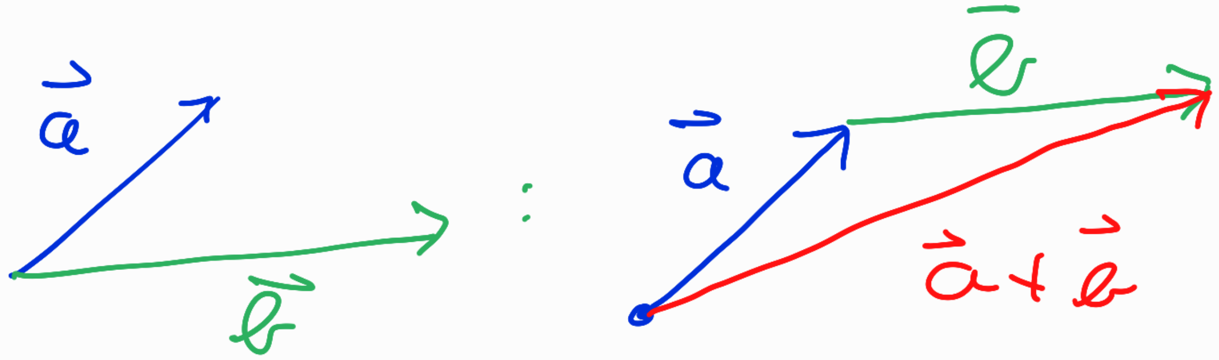


$$\vec a = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{RR'} = \dots$$



$\vec a : \overrightarrow{XX'}$

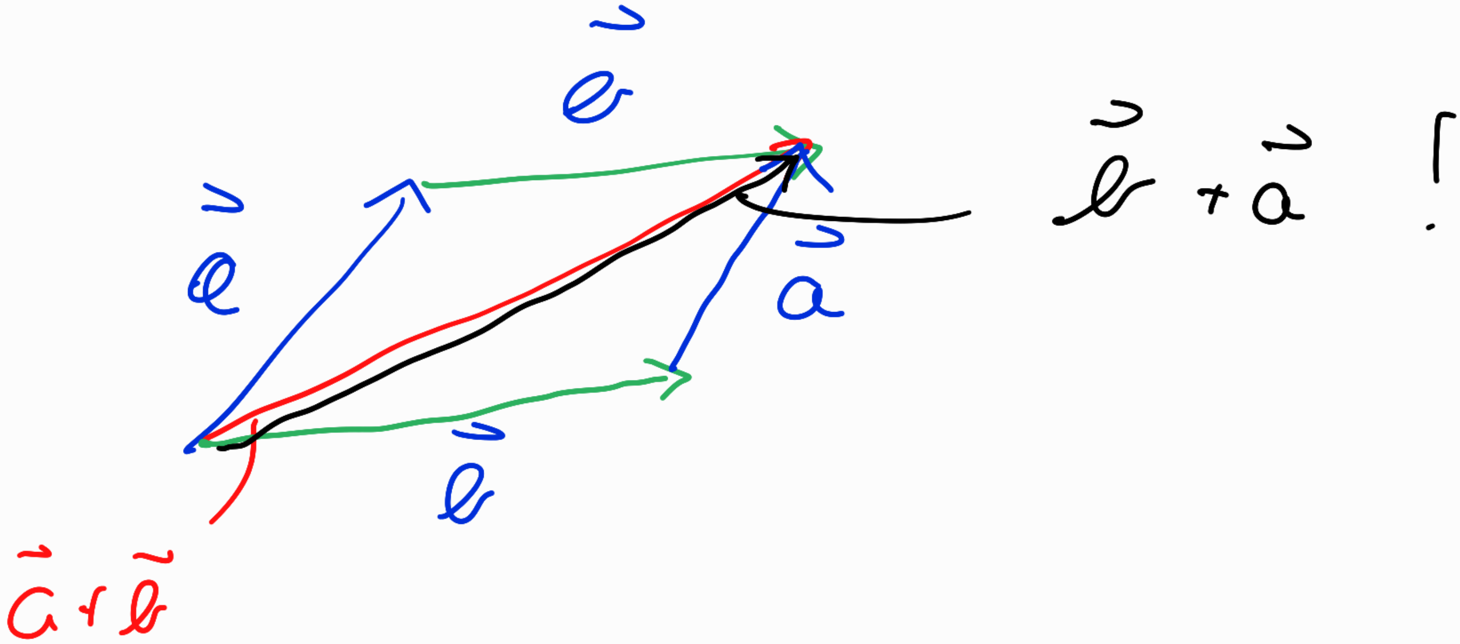
Hintereinanderausführung von Translationen = <u>Addition</u> von Translationen:



Eigenschaften der Addition:

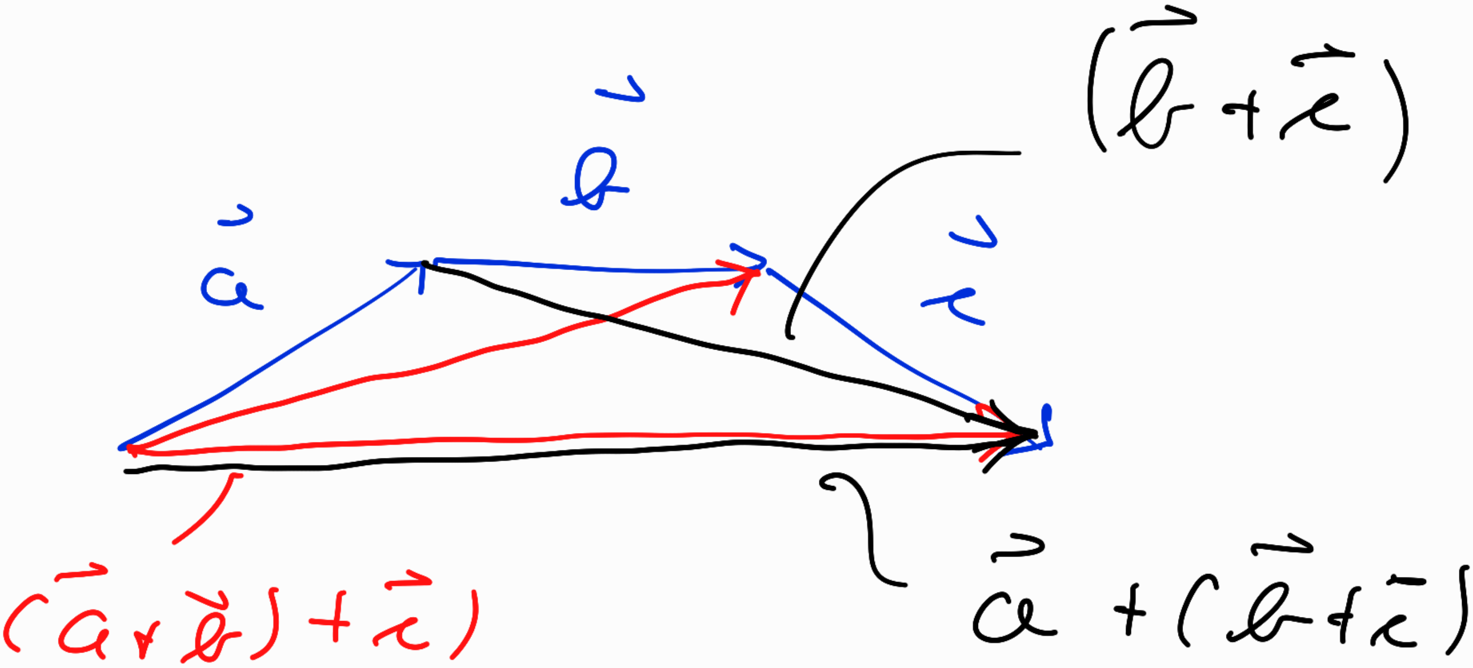
1) Addition ist <u>kommutativ</u>:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$



2) Addition ist assoziativ:

$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$



→ Klammern unnötig!

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad !$$

3) Existenz der Null-(Translation):

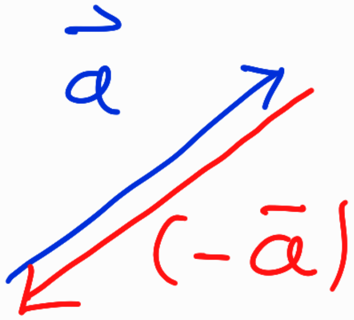
$\vec{0} = \overrightarrow{XX}$, derart, daß für bel. Translation $\vec{a}$:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad !$$

4) Jede Translation $\vec{a}$ besitzt genau eine <u>inverse Translation</u>

$$(-\vec{a})$$

derart, dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$



Eigenschaften der Addition

(A1) Assoziativität:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

(A2) Existenz der Null $\vec{0}$:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

(A3) Existenz des Inversen $(-\vec{a})$ zu $\vec{a}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

(A4) Kommutativität:

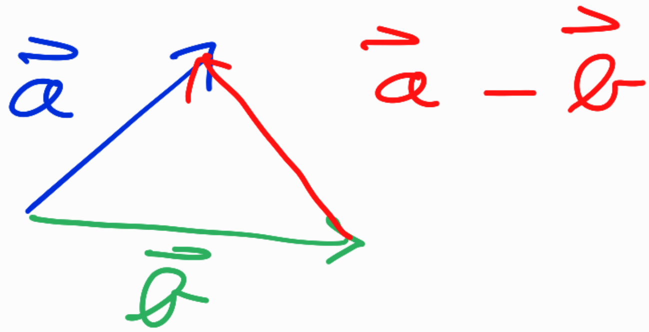
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Nachtrag:

Subtraktion zweier Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$

geometrisch:



warum?

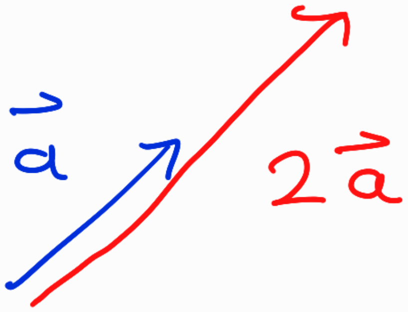
denn: $\vec{b} + \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + \underbrace{\vec{b} + (-\vec{b})}_{\vec{0}}$

$= \vec{a}$

Streckung (Stauchung) einer Translation $\vec{a}$ um Faktor $\lambda > 1$

(bzw $\lambda < 1$) $\hat{=}$ Skalarmultiplikation von $\vec{a}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

λ „Skalar"



$(\lambda = 2)$

$\rightsquigarrow$ geometrisch implizierte Eigenschaften der Skalarmultiplikation:

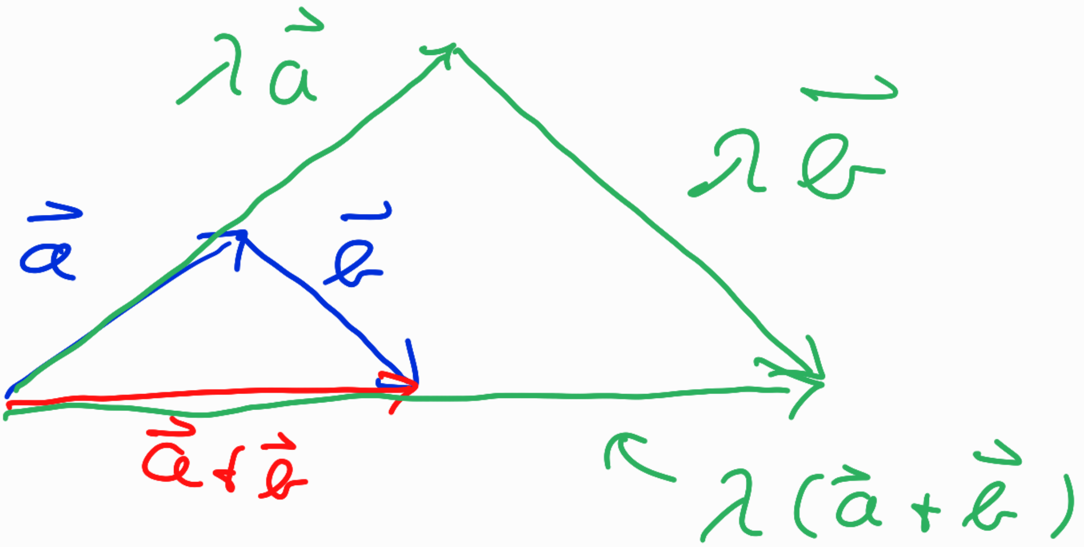
(S1) $\quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \overset{!}{=} \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(S2) $\quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(S3) $\quad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(S4) $\quad 1\vec{a} = \vec{a}$

Zu (S1): geometrisch:



aus (S1) – (S4) folgen:

(S5) $\quad 0\,\vec{a} = \vec{0}$

(S6) $\quad (-1)\,\vec{a} = (-\vec{a})$

Zu (S5): $\quad 0\,\vec{a} = (0+0)\,\vec{a} \overset{(S2)}{=} 0\,\vec{a} + 0\,\vec{a}$

$\longrightarrow$ addiere $(-0\vec{a})$: $\quad \vec{0} = 0\,\vec{a}$!

Zu (S6): $\quad \vec{0} = 0\,\vec{a} = (1-1)\,\vec{a} = \vec{a} + (-1)\,\vec{a}$

Translationen wesentlich bestimmt durch Verhalten unter Addition (A1 - A4) und Skalarmultiplikation (S1 - S4)

$\Rightarrow$ Vektoren (allgemein) sind Objekte, für die Addition und Skalarmultiplikation gleichermaßen erklärt sind!

genauer:

Def.: Vektoren, Vektorraum

Eine Menge V von Objekten mit Addition (=Vektoraddition) und Skalarmultiplikation gemäß (A1) – (A4) bzw. (S1) – (S4) nennen wir Vektorraum, die Elemente von V nennen wir Vektoren.

Beispiele:

(a) Translationen ✓

(b) $\mathbb{R}^n$ = Menge aller n-Tupel

$$= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

mit Addition und S.-M. wie folgt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Vektorraum?

(A1) – (A4) und

(S1) – (S4) sind

erfüllt! ✓

(2)

G_k = Menge der ganzrat. Fkten max. k-ten Grades

$$= \{ f : x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_k x^k \mid a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$$

mit Addition:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots$$

S.M:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \dots$$

(A1) - (A4) und (S1) - (S4) erfüllt!