letzte Vrlsg.:

- partielle Ableitung
- Gradient

- $\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x})$ = Ableitung nach x_ℓ in $f(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_n)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(\vec{x} + h e_\ell) - f(\vec{x}) \right)$$

- $$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ lineare Näherung:

$$\boxed{f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{h} \rangle}$$

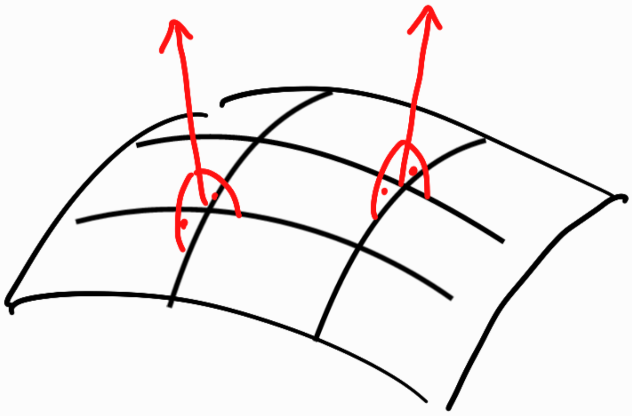
Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f$$

- <u>Eigenschaften</u>

1) $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \parallel$ Richtung des stärksten Anstiegs von f im x_0

2) $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \perp$ Hyperfläche $f(\vec{x}) \overset{!}{=} c$



- höhere partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

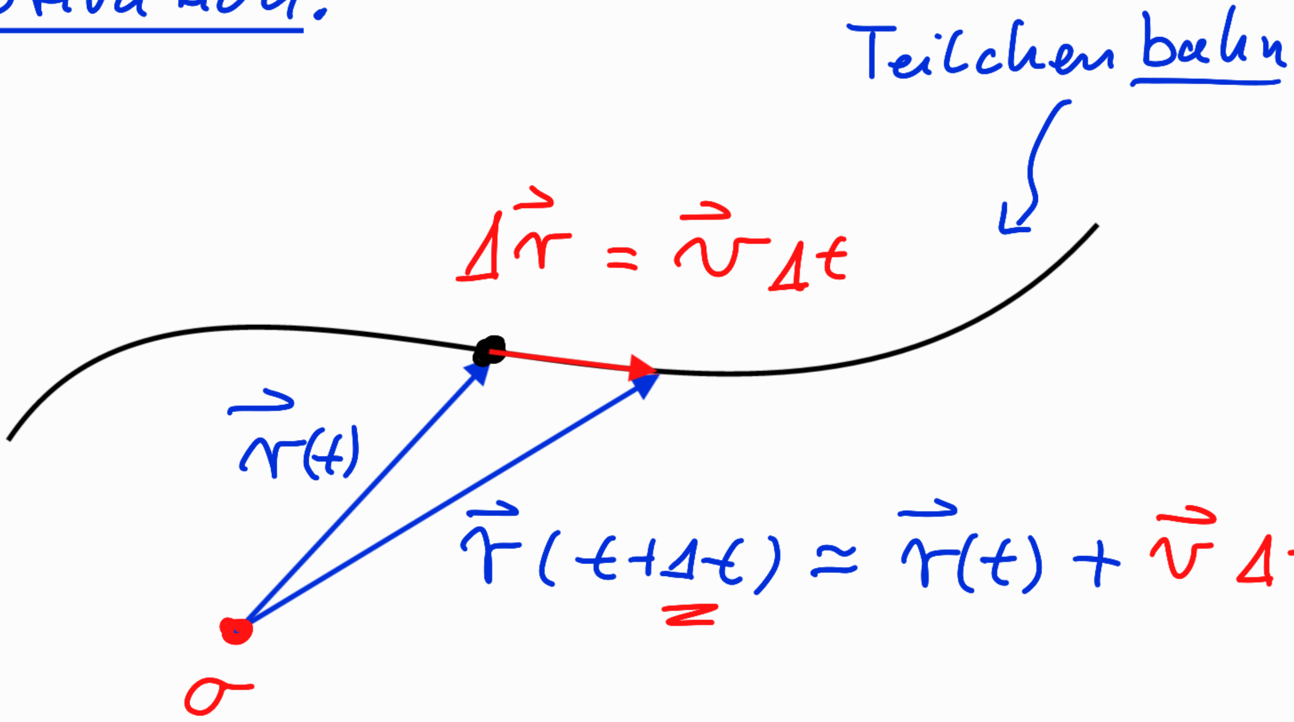
- S. v. Schwartz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

heute:

(Partielle) Ableitung <u>vektorwertiger</u> Funktionen

<u>Motivation:</u>



$$\vec{r}(t+\Delta t) \simeq \vec{r}(t) + \vec{v}\,\Delta t$$

<u>Bahn</u> $\hat{=}$ Abb.: $t \mapsto \vec{r}(t) \in V$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{1}{\Delta t}\left(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right) =: \dot{\vec{r}}(t)}$$

<u>momentane</u> Geschwindigkeit

allg.: Fkt. $\vec{f} : D \to V$

$x \longmapsto \vec{f}(x)$

$D \subset \mathbb{R}$ oder $D \subset \mathbb{R}^n$

$D = \mathbb{R}$: $\vec{f}\,'(x) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)\right)$

$D = \mathbb{R}^n$: $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_\ell}(\vec{x}) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\vec{f}(\vec{x} + h\vec{e}_\ell) - \vec{f}(\vec{x})\right)$

Ableitungsregeln

1) $(\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}\,' + \vec{g}\,'$

$(\lambda \vec{f})' = \lambda \vec{f}\,'$ (Linearität)

2) Produktregel: $s : D \to \mathbb{R}$

$(s\vec{f})' = s'\vec{f} + s\vec{f}\,'$

$$\langle \vec{g}, \vec{f} \rangle' = \langle \vec{g}', \vec{f} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{f}' \rangle$$

$$(\vec{g} \times \vec{f})' = \vec{g}' \times \vec{f} + \vec{g} \times \vec{f}'$$

3) $\vec{f} : D \to V$, $u : \tilde{D} \to D$

$D \subset \mathbb{R}$

$$(\vec{f} \circ u)' = (\vec{f}' \circ u) u'$$

4) $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ Basis von V

$$\rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}_B$$

$$\rightarrow \vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x})\, \vec{e}_i \right)'$$

$$\overset{1)}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i'(\vec{x})\, \vec{e}_i$$

Anwendungsbeispiele

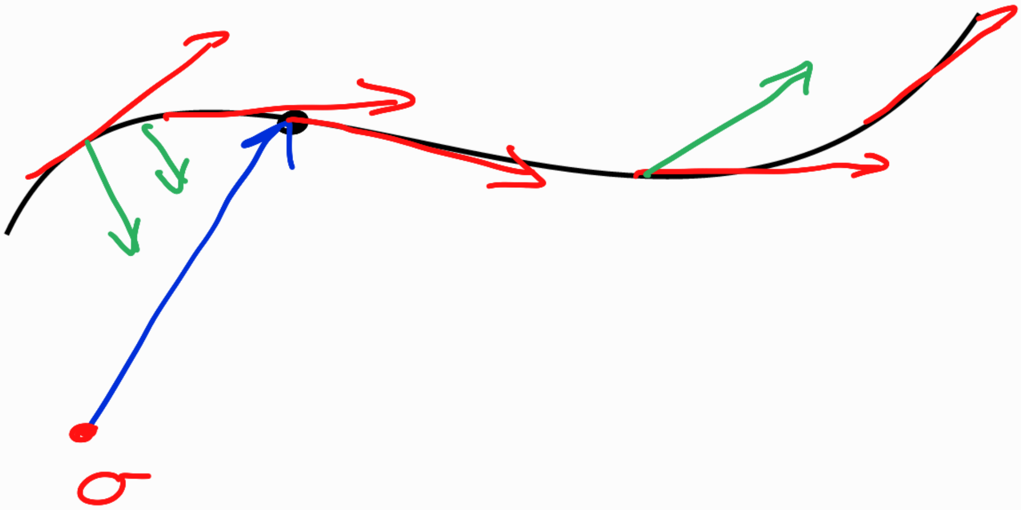
1) momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens:

Bahn: $[t_1, t_2] \to V$

$t \mapsto \vec{r}(t)$

momentane Geschw.:

$$\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t)$$



momentane Beschleunigung

$$\vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Beispiel: Wurf eines Körpers im Schwerefeld

Physik (Galilei):

$$\boxed{\vec{a}(t) \overset{!}{=} \vec{g}} = -g\,\vec{e}_3$$

$(g = 10\,m/s^2)$

$\rightsquigarrow$ allg. Wurfbahn:

$$\boxed{\vec{r}(t) \overset{!}{=} \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2}$$

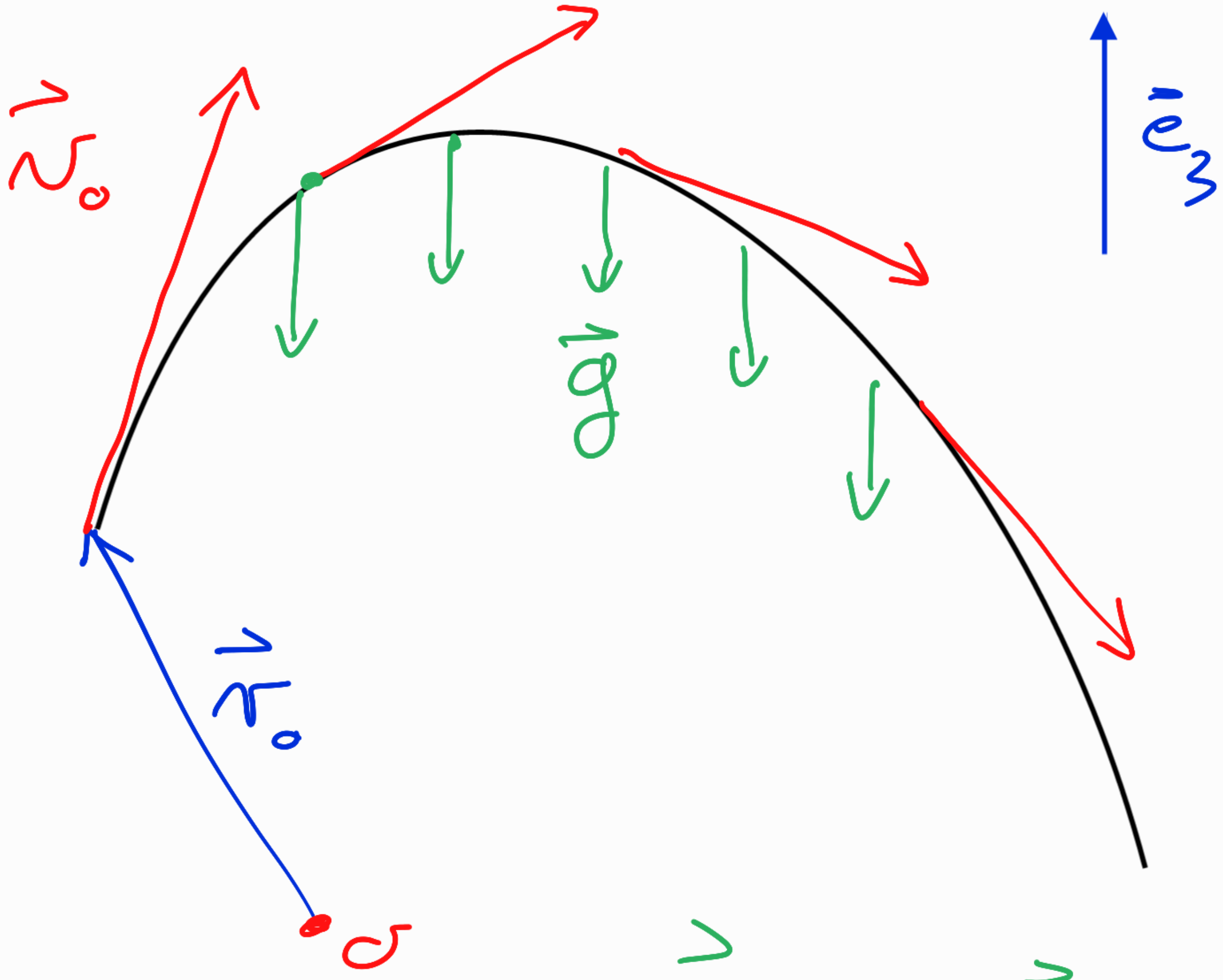
denn:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{0} + \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

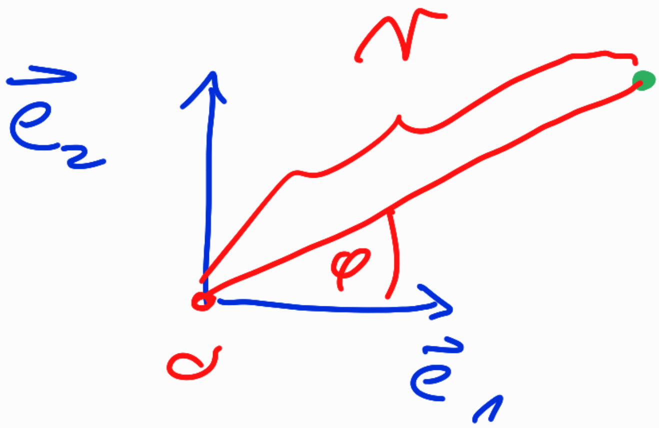
$$\hookrightarrow \vec{a}(t) = \vec{g} \quad \checkmark$$



$$\vec{g} = -g\,\vec{e}_3$$

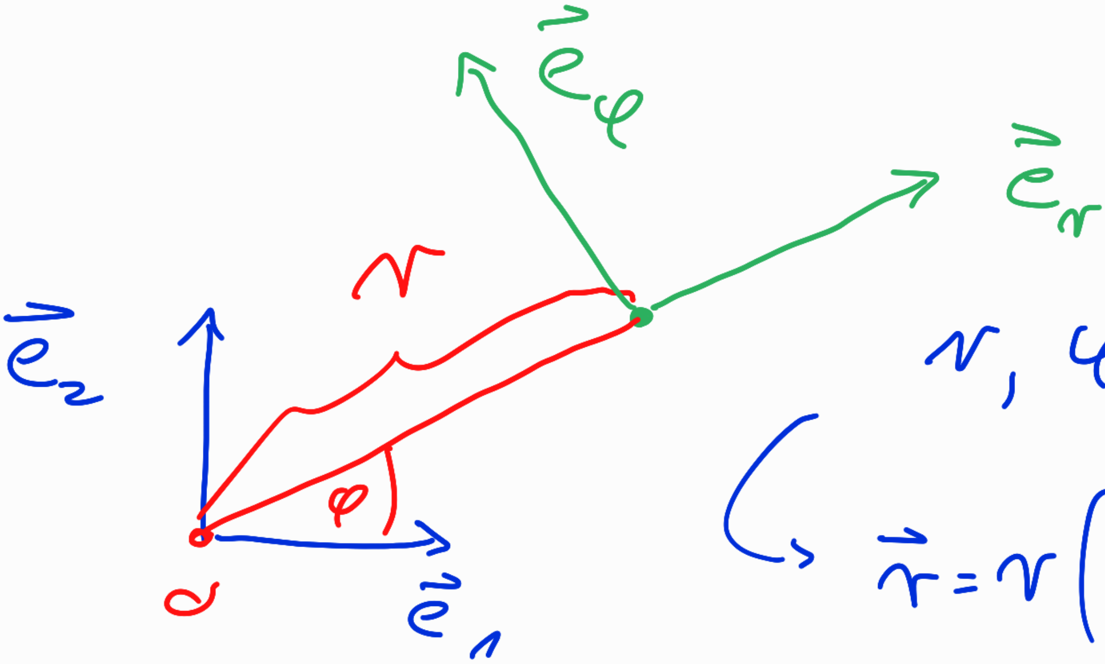
2) Lokale Basis:

a) Polarkoordinaten



r, φ

$$\hookrightarrow \vec{r} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$



r, φ

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

lokale Basis $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &:= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \\[2em] \vec{e}_\varphi &:= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \vec{e}_r$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right\|^2 = 1$$

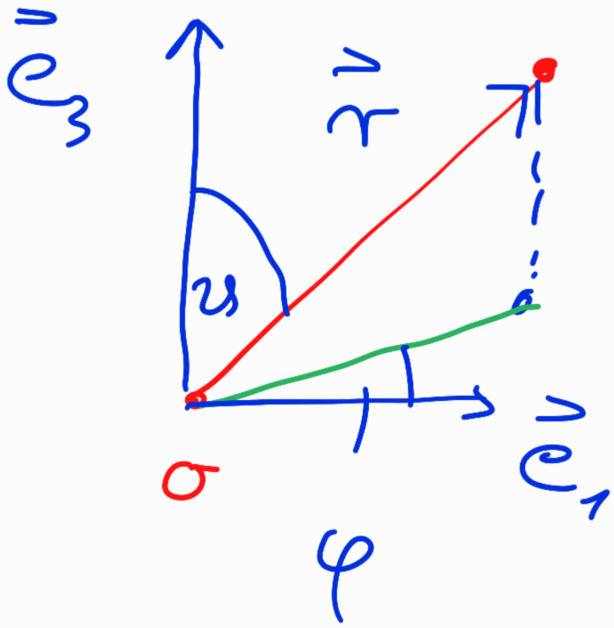
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right)$$

$$= r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r$$

$$\rightarrow \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

b) Kugelkoordinaten: (r, ϑ, φ)



$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{|\dots|}\, r \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}}_{}$$

Norm: $r \sin\vartheta$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$