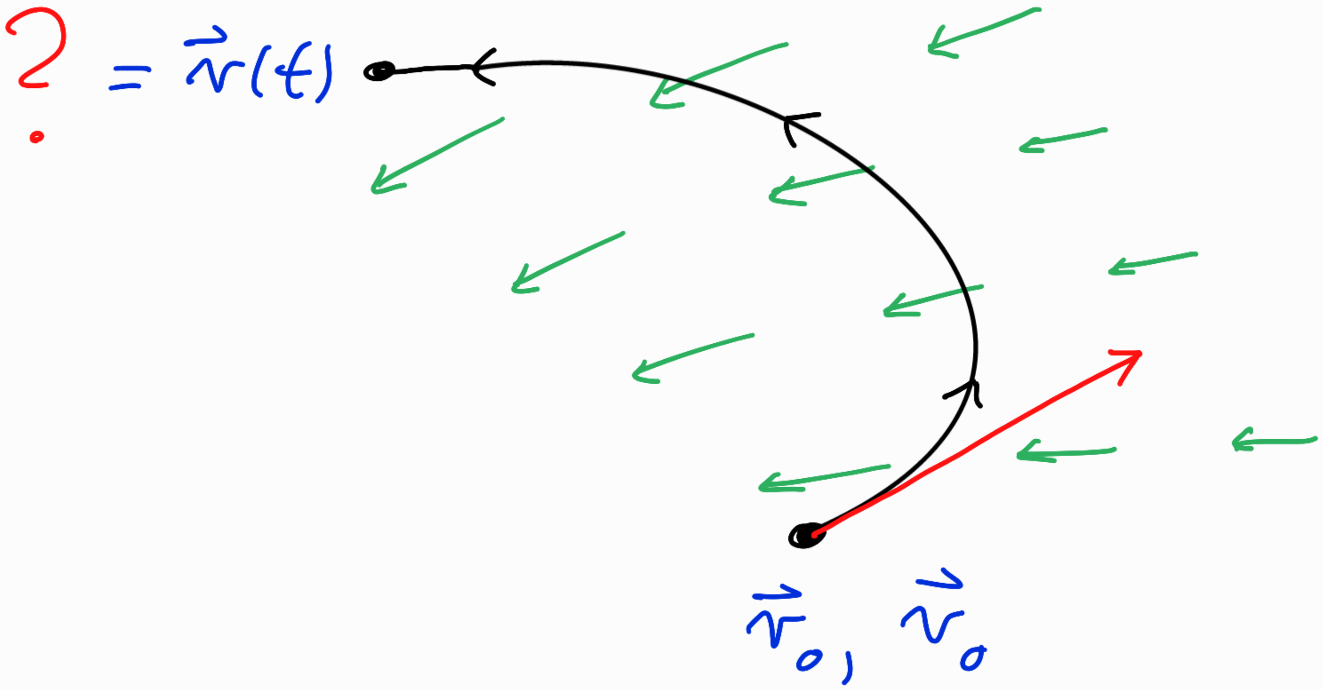
Thema der kommenden Wochen:

Differenzialgleichungen

z. B. Newtonsche Bewegungsgl.:

• Punktmasse im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$



Newton: Bahn $\vec{r}(t)$ genügt Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))} \quad (*)$$

d.h.:

$$\text{Bahn} = \text{Abb. } \vec{r}: [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t)$$

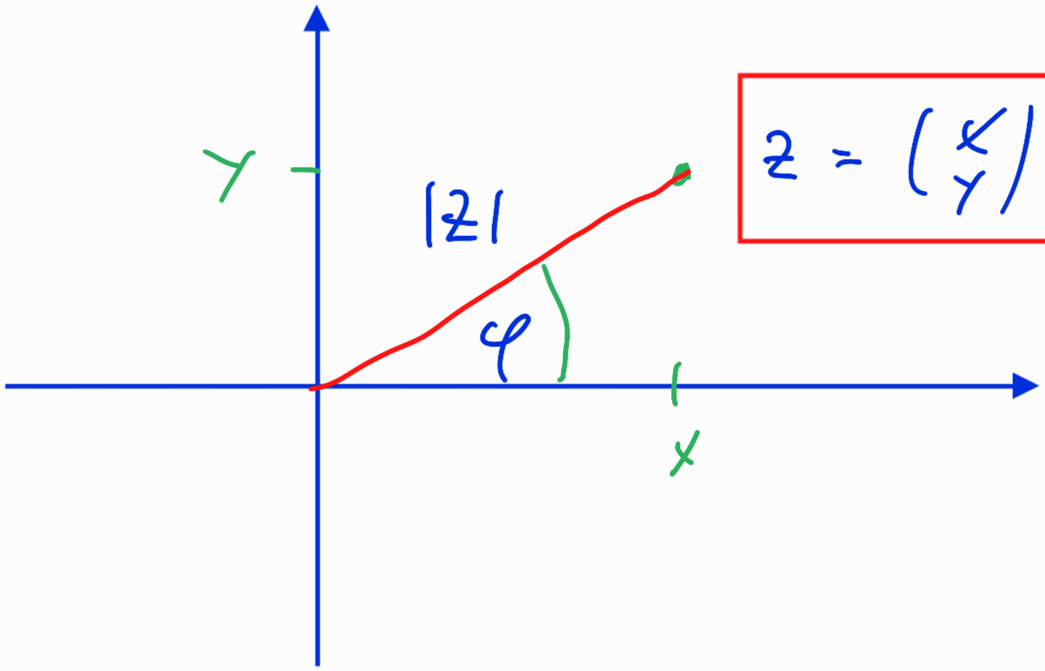
ist Lösung der Differenzialgleichung (*) zu Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t_0) \overset{!}{=} \vec{r}_0$$
$$\dot{\vec{r}}(t_0) \overset{!}{=} \vec{v}_0$$

Exkurs: <u>komplexe Zahlen</u>

geometrisch: kompl. Zahl z

$\equiv$ Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$



$$\boxed{z = \binom{x}{y}}$$

$\mathbb{R}^2$ = "komplexe Zahlenebene"

= Gaußsche Zahlenebene"

= $\mathbb{C}$ = Menge der kompl. Zahlen

- <u>Realteil</u>: $\operatorname{Re} z = x$
- <u>Imaginärteil</u>: $\operatorname{Im} z = y$

Betrag $\quad |z| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$

Argument $\quad \arg z = \varphi$

$$= \measuredangle\left(\vec{e}_1, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$\leadsto \quad z = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

(Polardarstellung)

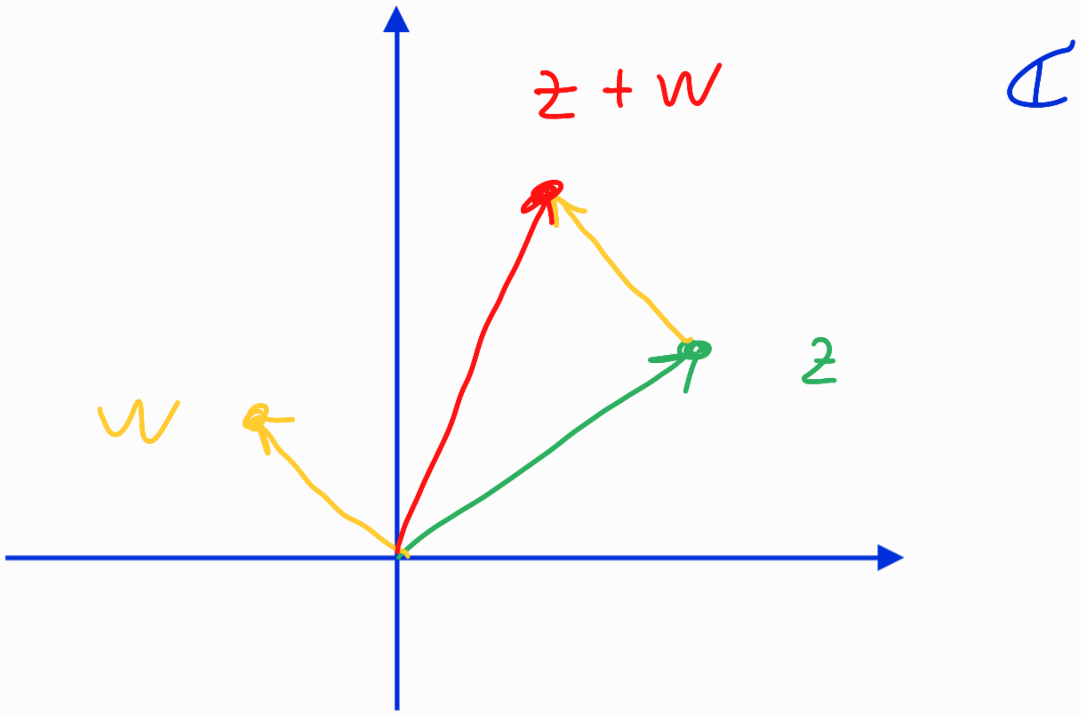
Addition kompl. Zahlen

= Vektoradd. im $\mathbb{R}^2$:

Def.

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \quad z + w = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ Eigenschaften der kompl. Addition = A1 – A4 !

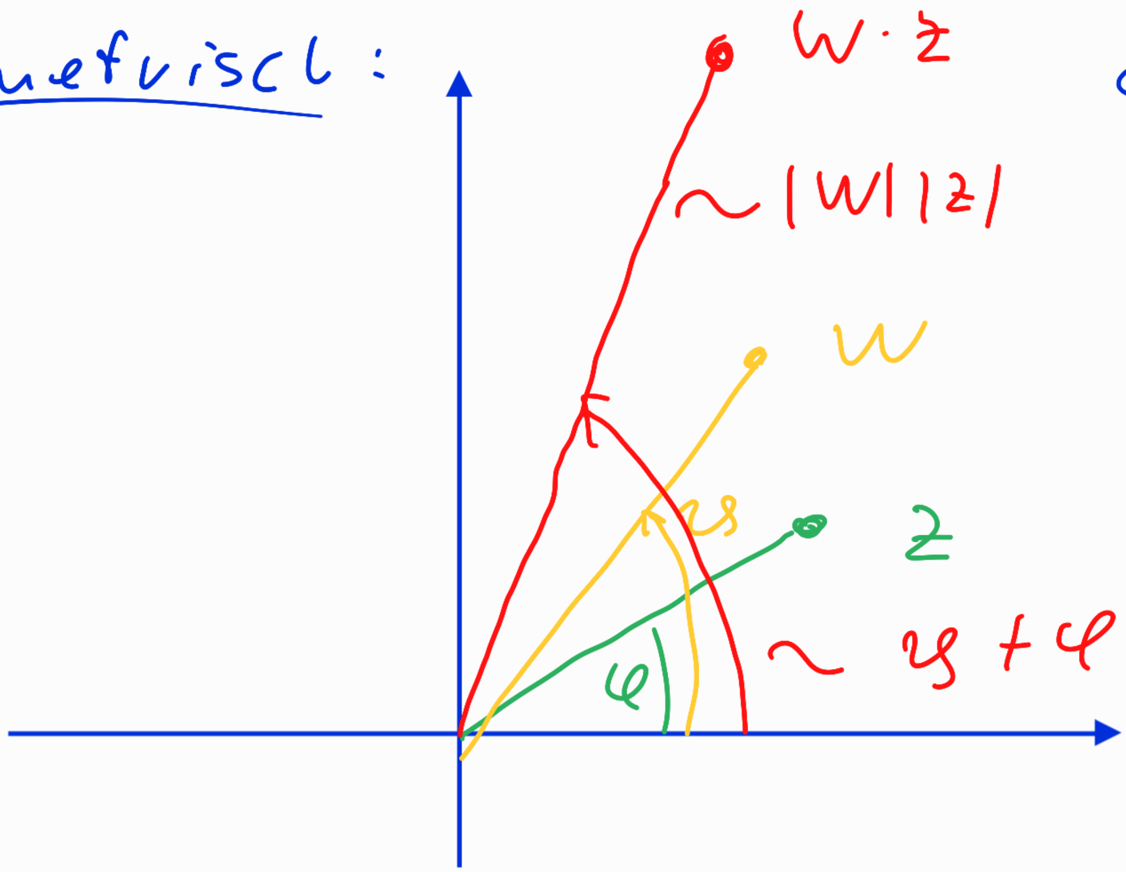
Multiplikation komplexer Zahlen

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{w \cdot z := \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}} \quad (*)$$

geometrisch:

I



warum?

$$w = |w|\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}, \quad z = |z|\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$wz = \left(|w|\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}\right)\left(|z|\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} |w||z|\left[\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right]$$

$$wz \overset{(*)}{=} |w||z| \left[\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right]$$

$$= |w||z| \begin{pmatrix} \overbrace{\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi}^{\cos(\vartheta+\varphi)} \\ \underbrace{\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi}_{\sin(\vartheta+\varphi)} \end{pmatrix}$$

$$wz = \underline{\underline{|w||z| \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) \\ \sin(\vartheta+\varphi) \end{pmatrix}}}$$

2) Eigenschaften der kompl. Multiplikation:

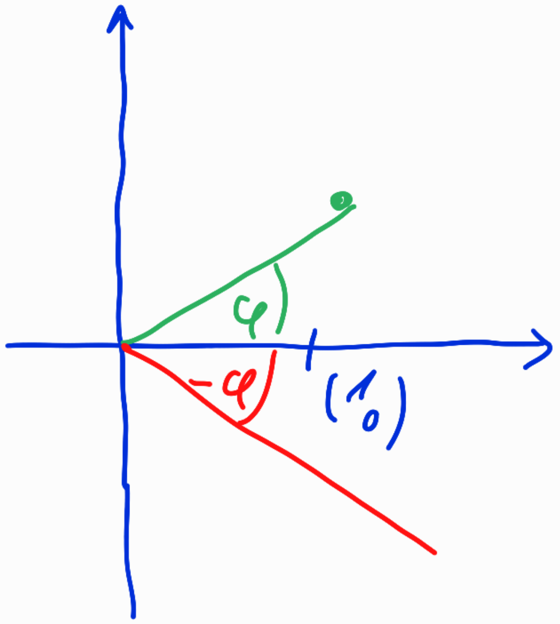
1) assoziativ:

$$v(wz) = (vw)z \quad \checkmark$$

3) inverses Element z^{-1} zu

$z \neq \binom{0}{0}$: $\quad z^{-1} z = \binom{1}{0}$

Γ z^{-1} zu $\quad z = |z| \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$



$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} \binom{\cos\varphi}{-\sin\varphi}$$

✓

$\lrcorner$

2) Einselement : $\binom{1}{0}$

$z \binom{1}{0} = z = \binom{1}{0} z$ ✓

4) <u>Kommutativ</u>

$wz = zw$

Addition und Multiplikation komplexer Zahlen genau wie

Add. und Multiplikation reeller Zahlen!

→ mit komplexen Zahlen kann genau wie mit reellen Zahlen gerechnet werden!

Reelle Zahlen als Teilmenge der kompl. Zahlen,

imaginäre Einheit „i“

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ 0 \end{pmatrix}$$

Identifikation:

$$\mathbb{C} \ni \boxed{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Def}}{=} x} \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ xb \end{pmatrix} \quad !$$

$\rightarrow$ $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{=} 1}$$

zweckmäßig:

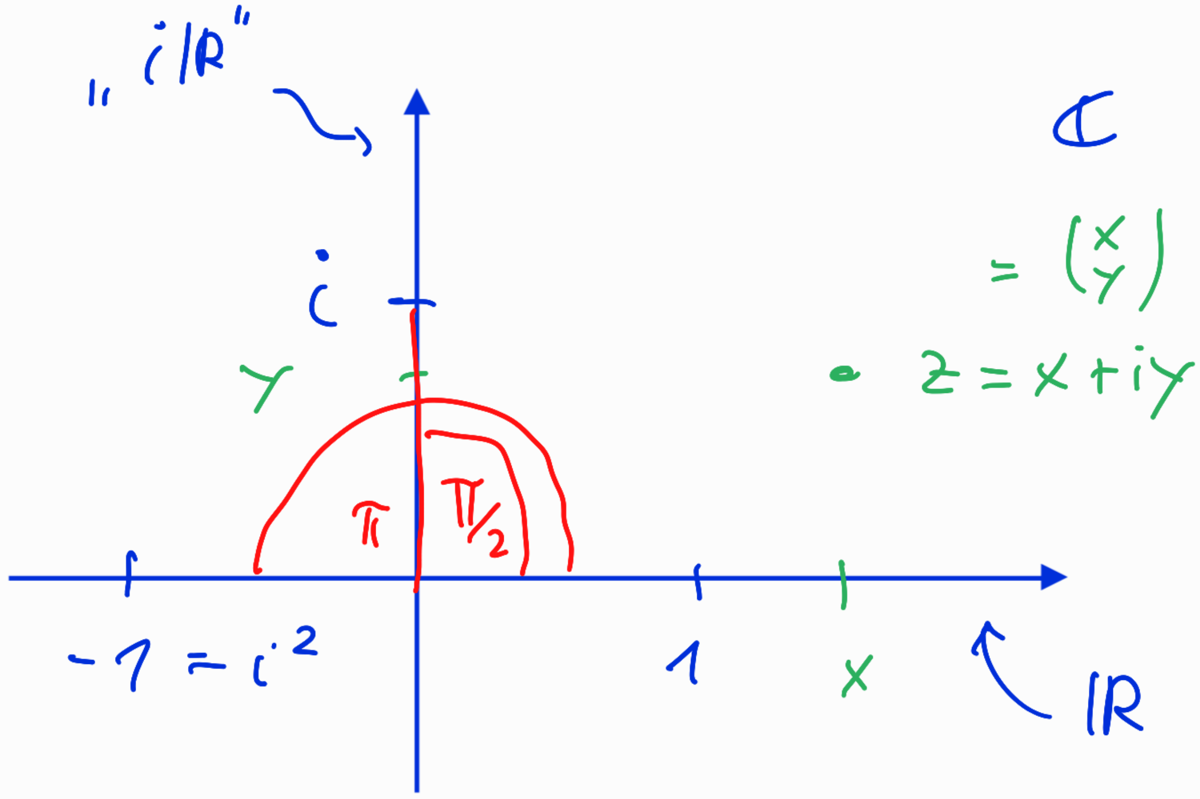
Def.: <u>imaginäre Einheit</u>:

$$\boxed{i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}}$$

$\leadsto$ $$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\hat{=} \\ 1}} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{i}$$

$$= \boxed{x + iy \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$



Beachte:

$$\boxed{i^2 = i \cdot i = -1}$$

formal: $i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{1 \,\parallel}$$

$$= -1$$

komplexes Rechnen mittels $\boxed{i^2 = -1}$

$$z = x + iy \qquad \left(= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$w = a + ib \qquad \left(= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

- $$w + z = (a+ib) + (x+iy) = a+x + i(b+y)$$

- $$wz = (a+ib)(x+iy) = ax + iay + ibx + \underbrace{i^2}_{=-1} by = ax - by + i(ay+bx)$$

✓

- komplexe Gleichung:

$$(*) \qquad z^2 + 2z + 3 = 0$$

Lösungen?

$$(*) \iff (z+1)^2 + 2 = 0$$

Lösung z erfüllt:

$$z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\overset{!}{=}\, i} \sqrt{2}$$

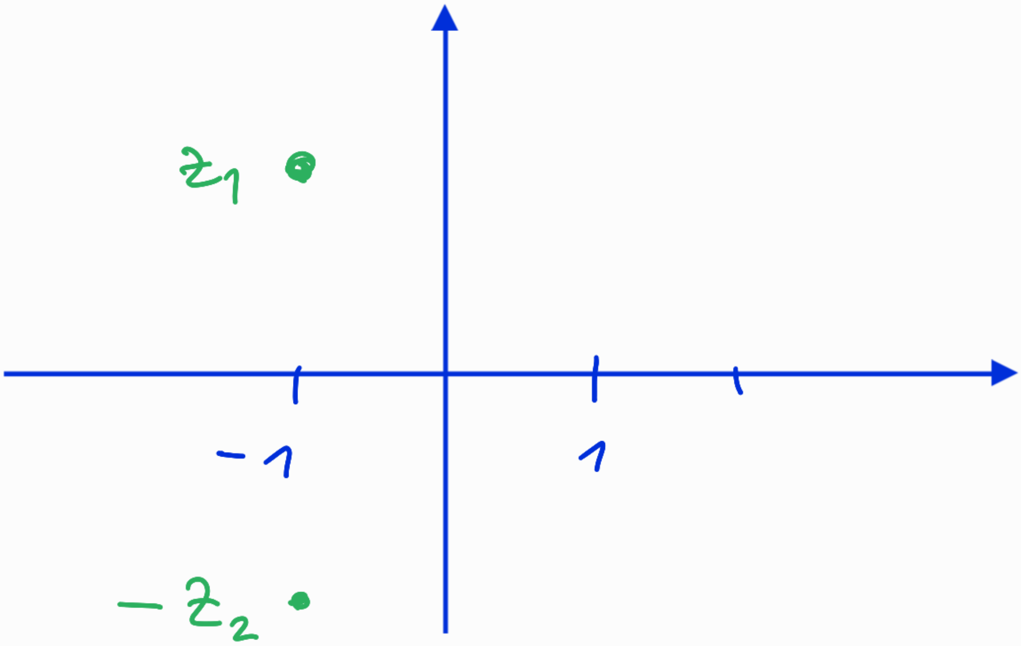
Beachte:

$i^2 = -1 \rightsquigarrow i$ ist Quadratwurzel der Gleichung

$$z^2 = -1$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\sqrt{-1} := i}$$

$\rightsquigarrow$ d.h. $\boxed{z_{1/2} = -1 \pm i\sqrt{2}}$

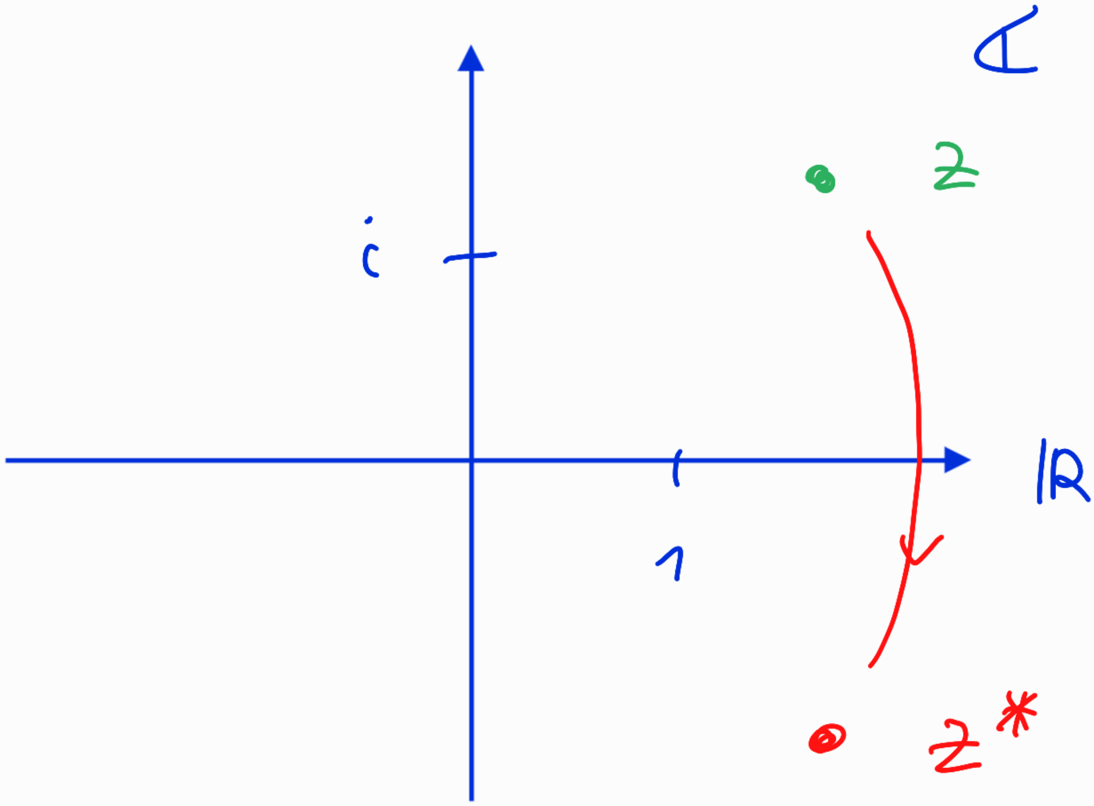


$$z_{1/2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Komplexe Konjugation

= Spiegelung an der reellen Achse $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$z \longrightarrow z^*$$



$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{*} z^* = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$z = x + iy \xrightarrow{*} z^* = x - iy$$

→ <u>Eigenschaften und Relationen</u>

- $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ ✓
- $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

- $$\boxed{|z|^2 = z z^*}$$

⌈

$z = x + iy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

$\rightarrow \; z z^* = (x+iy)(x-iy)$

$= x^2 - (iy)^2$

$= x^2 + y^2 = |z|^2$ ✓ ⌋

- $$\boxed{z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}}$$

⌈

$z \cdot \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$ ✓ ⌋

Komplexe Funktionen

kompl. Exponentialfkt:

$$\exp(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} z^{\ell} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \dots$$

$$\sin(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{z^{(2\ell+1)}}{(2\ell+1)!}$$

$$= z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots$$

$$\cos(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{z^{(2\ell)}}{(2\ell)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{z^4}{4!}$$