Differenzialgleichungen

z.B. zwecks Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines System-Zustands

$$\underline{\underline{\dot{y}(t)}} = f(\underline{\underline{y(t)}})$$

"Dynamik" $\longrightarrow$ $\underline{\underline{y(t)}}$

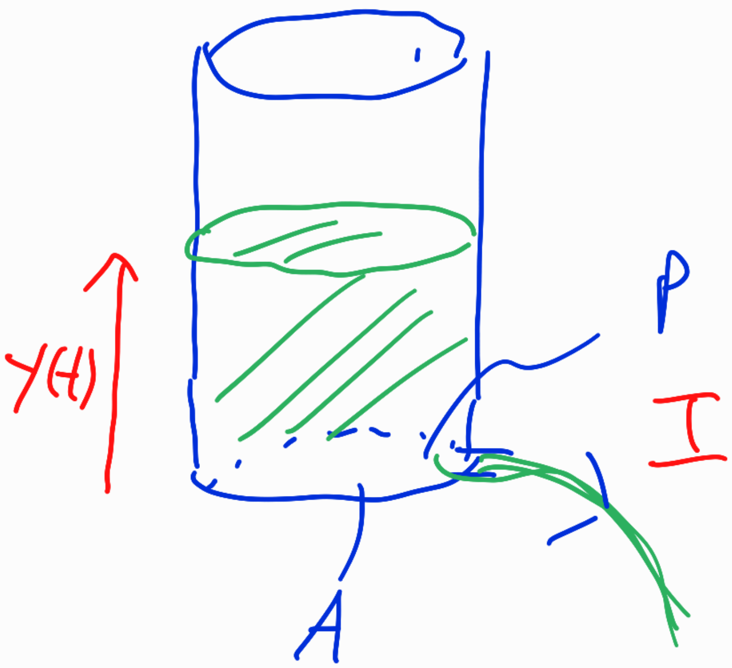
Mechanik: Newton-Gleichung

Quantenmechanik: Schrödinger-Gleich.

Elektrodynamik: Maxwellsche Gleichungen

Thermodynamik: Wärmeleitungsgleichung

einfaches Bsp.: auslaufender Flüssigkeits-behälter:



$$V = A\,y$$

Zustand: Höhe $y(t)$

Zustandsänderung: $I = -\dfrac{dV}{dt} = -A\dot{y}$

I bestimmt durch Druck p: $I(p)$

a) zähe Flüssigkeit: $I = \alpha p$

b) ideale " " : $I = \beta \sqrt{p}$

Druck p bestimmt durch Höhe y:

$$p = \rho g y$$

→ a) zähe Flüssigkeit:

$$\dot{y} = -\frac{I}{A} = \underbrace{-\frac{1}{A}\alpha \rho g}_{=: a} \cdot y$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{y}(t) = -a\, y(t)} \qquad (a)$$

b) ideale Flüssigkeit:

$$\dot{y} = -I/A = \underbrace{-\frac{1}{A}\beta \sqrt{\rho g}}_{=: b} \sqrt{y}$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = -b\sqrt{y(t)}}$$

konkret im Fall a):

geg.: Höhe $\underline{\underline{H}}$ der Flüssigkeit

zur Zeit $\underline{\underline{t = 0}}$;

ges: Höhe zur Zeit $t_1 > 0$

$$\underline{\underline{y(t_1)}} = ?$$

<u>Lösung</u>: finde <u>Funktion</u> $\underline{\underline{y(t)}}$

derart, dass

(i) für alle $t \geq 0$:

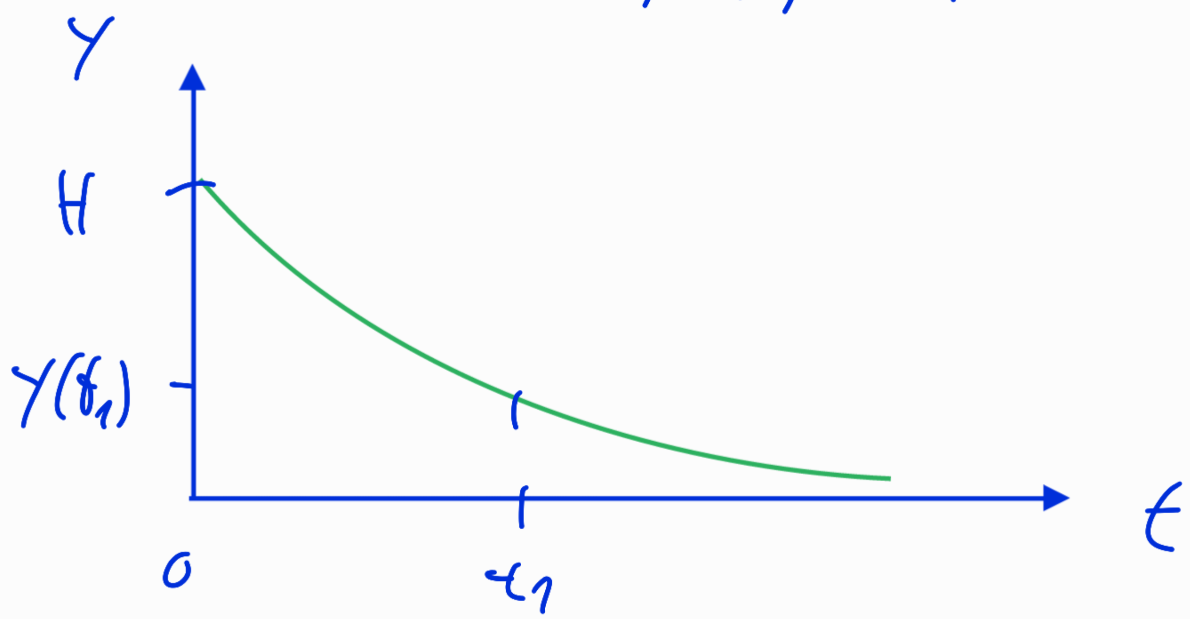
$$\underline{\underline{\dot{y}(t)}} \overset{!}{=} \underline{\underline{-a}}\, \underline{\underline{y(t)}}$$

(ii)

$$y(0) \overset{!}{=} H$$

$$\rightarrow \boxed{y(t) = H e^{-at}}$$

$\rightarrow$ Lsg. der DGL $\dot{y} = -ay$ zum Anfangswert $y = H$ bei $t = 0$ ist $y(t) = H e^{-at}$:



allg.:

Def.:

Eine Funktion $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$
(allg.: $\mathbb{R}^n$) $\quad x \mapsto y(x)$

ist spezielle Lösung der Differentialgleichung (DGL).

$$y' = f(y, x)$$

zum <u>Anfangswert</u> y_0 bei $x = x_0$

g.d.w.

(i)

$$y'(x) \overset{!}{=} f(y(x), x)$$

für alle $x \in [x_1, x_2]$

(ii)

$$y(x_0) \overset{!}{=} y_0$$

Eine <u>allgemeine Lösung</u> $y_c(x)$ erfüllt (i) und enthält einen freien Parameter c.

<u>Mathematik</u>: Existenz und Eindeutigkeit

Lösungen und Lösungsmethoden für bestimmte Typen von DGLen:

1) <u>triviale DGL:</u> $\left(f(\cancel{y}, x) \right)$

$$\boxed{y' = f(x)}$$

Lsg. zum AW. y_0 bei $x = x_0$:

$$\boxed{y(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\, du + y_0}$$

HDI

Bew.: (i) $y'(x) = f(x)$ ✓

(ii) $y(0) = y_0$ ✓ $\perp$

2) <u>homogene lineare DGL</u>

$$\boxed{y' = g(x)\, y}$$

Lsg. zum AW y_0 bei $x = x_0$:

$$\boxed{y(x) = y_0 \, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

Bew:

(i) $$y'(x) = y_0 \left(e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du} \right)'$$

$$= \underbrace{y_0 \, g(x) \, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}_{= y(x)}$$

d.h. $$y'(x) = g(x)\, y(x) \quad \checkmark$$

(ii) $$y(x_0) = y_0 \, e^{\overbrace{\int_{x_0}^{x_0} g(u)\,du}^{}_{=0}} = y_0$$

$\checkmark$ ⌟

Spezialfall: $g(x) = c$

2b)

$$\boxed{y' = c\,y}$$

Lsg. zum AW y_0 bei $x = x_0$

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{c(x-x_0)}}$$

3) <u>inhomogene</u> <u>lineare DGL</u>:

$$\boxed{y' = g(x)\,y + f(x)} \quad (*)$$

Inhomogenität

<u>Lösungsmethode für allg. Lsg:</u>

a) bestimme <u>allg. Lösung</u>

$y_c(x)$ der <u>homogenen DGL</u>:

$$\boxed{y' = g(x)\, y}$$

(vgl. 2))

b) bestimme <u>spezielle Lsg</u> $y_s(x)$ für inhomogene DGL (*)
(für bel. gewählten AW. y_0)

$$\rightarrow \quad \boxed{y(x) = y_c(x) + y_s(x)}$$

ist <u>allg. Lsg.</u> der DGL (*)

$$y_c'(x) = g(x)\, y_c(x)$$

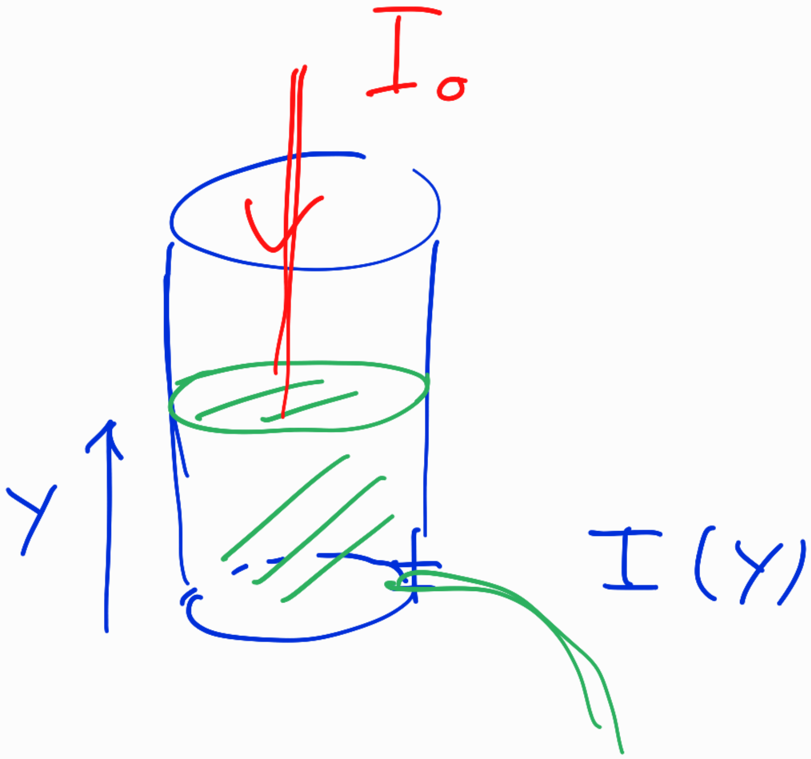
$$y_s'(x) = g(x)\, y_s(x) + f(x)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \left(y_c(x) + y_s(x) \right)'$$

$$= \underbrace{g(x)\, y_c(x) + g(x)\, y_s(x)}_{\parallel} + f(x)$$

$$= g(x)\, y(x) + f(x)$$

Beispiel: auslaufender Behälter mit konstantem Zufluss I_0:



$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{y} = -ay + J_0}$$

a) allg. Lsg. der homog. DGL

$$\dot{y} = -ay \quad :$$

$$\rightarrow \quad y_c(t) = c\, e^{-at}$$

e) spezielle Lsg.:

$$y_s(t) = J_0/a \quad !$$

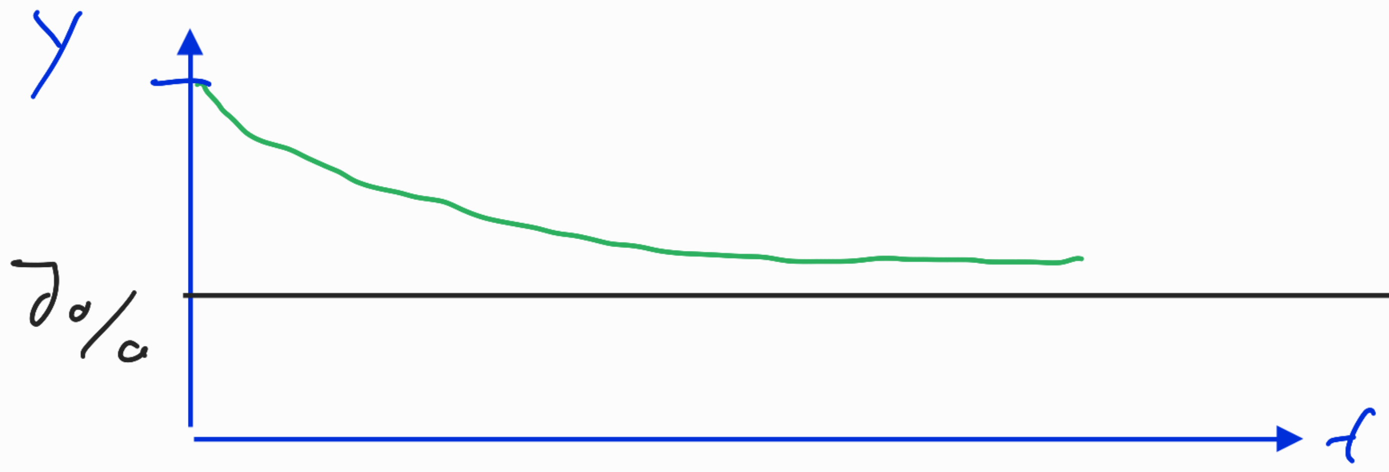
[Lsg., da:

$$\dot{y}_s(t) = 0 \overset{!}{=} -a \frac{J_0}{a} + J_0$$

]

⇝ allg. Lsg. lautet

$$\boxed{y(t) = c\, e^{-at} + \frac{J_0}{a}}$$



4) Separierbare DGL:

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y)}$$

Lösung $y(x)$ zum AW y_0 bei $x = x_0$ bestimmt durch:

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{h(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} g(u)\,du \qquad (*)}$$

„Trennung der Variablen"

Bew.: „$\frac{d}{dx}(*)$":

$$\frac{1}{h(y(x))}\, y'(x) \overset{!}{=} g(x)$$

d. h. $\quad y'(x) = g(x)\, h(y(x))$ ✓ (i)

$x = x_0$:

$$0 \overset{!}{=} \int_{y_0}^{y(x_0)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x_0} g(u)\,du \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \quad y(x_0) = y_0 \quad !$ ✓ (ii)

Merkschema:

$$y' = g(x)\, h(y) \qquad \Big\downarrow\ h(x)$$

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \qquad \Big| \, dx, \int$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$$

<u>Beispiel</u>: Fall b) (ideale Fl.)

$$\dot{y} = \underbrace{-b}_{g(x)} \; \underbrace{\sqrt{y}}_{h(y)}$$

T. d. V.:

$$\underbrace{\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{y}}}_{2\sqrt{y}\,\Big|_{y_0}^{y(t)}} \overset{!}{=} \underbrace{\int_{t_0}^{t} (-b)\, d\tilde{t}}_{-b(t-t_0)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y(t)} - 2\sqrt{y_0} \overset{!}{=} b(t_0 - t)$$

2 → $$y(t) = \left(\sqrt{y_0} + \frac{b}{2}(t_0 - t)\right)^2$$

für $t_0 = 0$:

$$\boxed{y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{b}{2}t\right)^2}$$