letzte Vrlsg.:

- allg. DGL: $\boxed{y' = f(y,x)}$
  (1. Ordnung)

- spezielle Lsg. $y(x)$ zum AW y_0 bei $x = x_0$ erfüllt:

  (i) $y'(x) = f(y(x), x)$

  für alle $x \in [x_1, x_2]$

  (ii) $y(x_0) = y_0$

- homogene lineare DGL:

$$y' = g(x)\, y$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}$$

z. B. $\boxed{y' = c\,y}$

$$\leadsto \quad y(x) = y_0\, e^{c(x-x_0)}$$

- inhomogene lineare DGL:

$$y' = g(x)\,y + f(x) \qquad (*)$$

$\leadsto$ allg. Lsg.:

$$y(x) = y_c(x) + y_s(x)$$

allg. Lsg. von $y' = g(x)\,y$

spezielle Lsg. von $(*)$

- separierbare DGL:

$$y' = g(x)\, h(y)$$

$\Rightarrow$ Lsg. $y(x)$ zum AW y_0 bei $x = x_0$ bestimmt durch

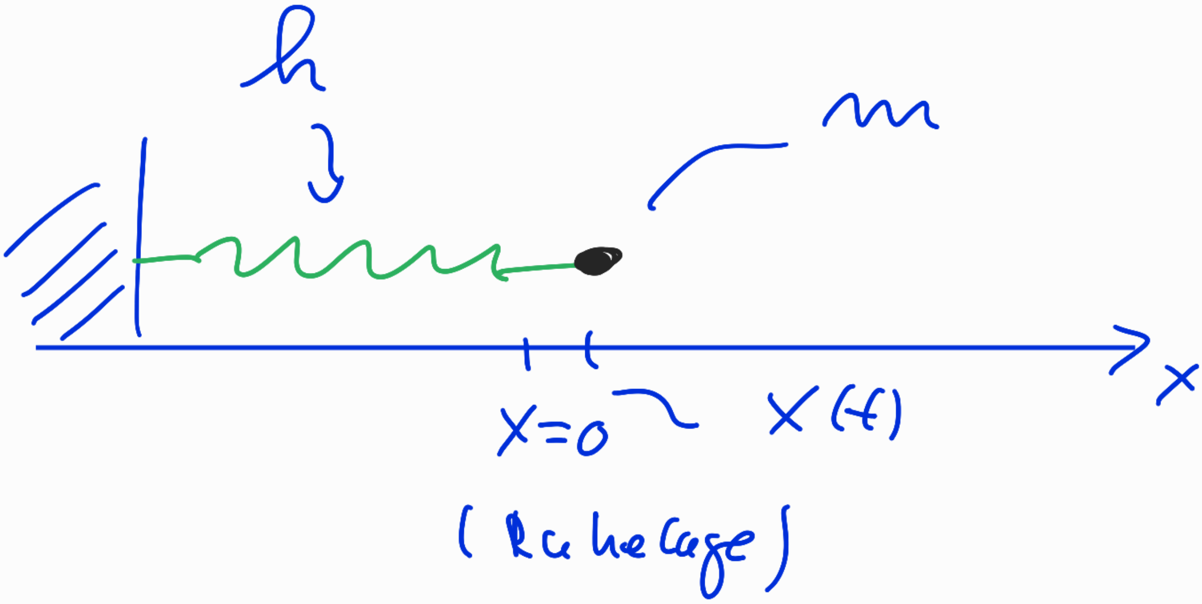
$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{h(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} g(u)\, du$$

„Trennung der Variablen"

heute: DGL. 2. Ordnung

am Beispiel des

Harmonischer Oszillator mit Dämpfung



Federkraft: $F(x) = -k\,x$

Reibungskraft: $F_r(\dot{x}) = -\gamma m \dot{x}$

Newton:

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) + F_r(\dot{x}(t))$$

$$= -kx(t) - \gamma m \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0}$$

DGL 2. Ordnung (linear, homogen)

Problem: finde "Bahn" $x(t)$ für

Anfangsort $x_0 = x(t_0)$

Anfangsgeschw. $v_0 = \dot{x}(t_0)$

bei $t = t_0$

Lösungsmethode: bestimme spezielle Lsgen der DGL

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0} \quad (*)$$

mittels Exponentialansatz

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda t}} \qquad \lambda = ?$$

$\hookrightarrow$ $\dot{x}(t) = \lambda\, x(t)$

$\ddot{x}(t) = \lambda^2\, x(t)$

in DGL $(*)$ eingesetzt:

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{k}{m}\right)}_{\stackrel{!}{=} 0} x(t) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Bestimmungsgleichung für λ:

$$\boxed{\lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{k}{m} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\lambda + \gamma/2\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow$ Lsg.en

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$
$$= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - k/m}$$

<u>Fallunterscheidung</u>

a) keine Dämpfung: $\gamma = 0$

b) schwache " ": $\gamma^2/4 < k/m$

c) starke " ": $\gamma^2/4 > k/m$

d) Grenzfall: $\gamma^2/4 = k/m$

a) $\gamma = 0$: $\qquad \ddot{x} - \frac{k}{m} x = 0$

$$\rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$= \pm i \sqrt{k/m}$$

$$\rightarrow \boxed{x_1(t) = e^{+i\sqrt{k/m}\,t} \quad , \quad x_2(t) = e^{-i\sqrt{k/m}\,t}}$$

reelle Lösungen:

$x(t)$ Lsg. $\Longrightarrow$ $\mathrm{Re}\, x(t)$ Lsg. !

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{Im}\, x(t)$ "

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

$$\rightarrow \mathrm{Re}(\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}) = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\overline{(\mathrm{Re}\,x(t))}} + \gamma\, \dot{\overline{\mathrm{Re}\,x(t)}} + \frac{k}{m} \mathrm{Re}\,x(t) = 0 \; \checkmark$$

reelle Lsgen:

$$\tilde{x}_1(t) = \mathrm{Re}\, x_1(t) = \mathrm{Re}\, e^{i\sqrt{k/m}\, t}$$

$$= \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$\tilde{x}_2(t) = \mathrm{Im}\, x_1(t) = \mathrm{Im}\, e^{i\sqrt{k/m}\, t}$$

$$= \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

mit $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ erhalten

wir allg. reelle Lsg.:

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}$$

$$x(0) = c_1$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 c_2$$

$\rightarrow$ Lsg. mit $x(0) = x_0$ und

$\dot{x}(0) = v_0$

Lautet:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

b) schwache Dämpfung:

$$\underline{\underline{\gamma^2/4 < k/m}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\gamma^2/4 - k/m}$$

$$= -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{(-1)}_{\Rightarrow i}\underbrace{(k/m - \gamma^2/4)}_{> 0}}$$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\,\omega}$$

mit $\quad \omega = \sqrt{k/m - \gamma^2/4}$

$(\rightsquigarrow \omega < \omega_0)$

$\rightsquigarrow$ reelle Lsgen:

$$\tilde{x}_1(t) = \mathrm{Re}\, e^{\lambda_1 t}$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{-\gamma/2\, t}\, e^{i\omega t}\right)$$

$$= e^{-\gamma/2\, t} \cos(\omega t)$$

$$\tilde{x}_2(t) = \mathrm{Im}\, e^{\lambda_1 t}$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin(\omega t)$$

⇒ allg. reelle Lsg:

$$x(t) = c_1 \tilde{x}_1(t) + c_2 \tilde{x}_2(t)$$

d.h.

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right)}$$

gedämpfte Schwingung!