gestern:

$$\boxed{\text{Vektoren} \equiv \text{Objekte, für die } \underline{\text{Vektoraddition}} \text{ und } \underline{\text{Skalarmultiplikation}} \text{ erklärt sind!}}$$

(A1) Assoziativität

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

(A2) Existenz des Nullvektors $\vec{0}$:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

(A2) Existenz des inversen Vek.

$(-\vec{a})$ zu $\vec{a}$: $\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

(A3) Kommutativität:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

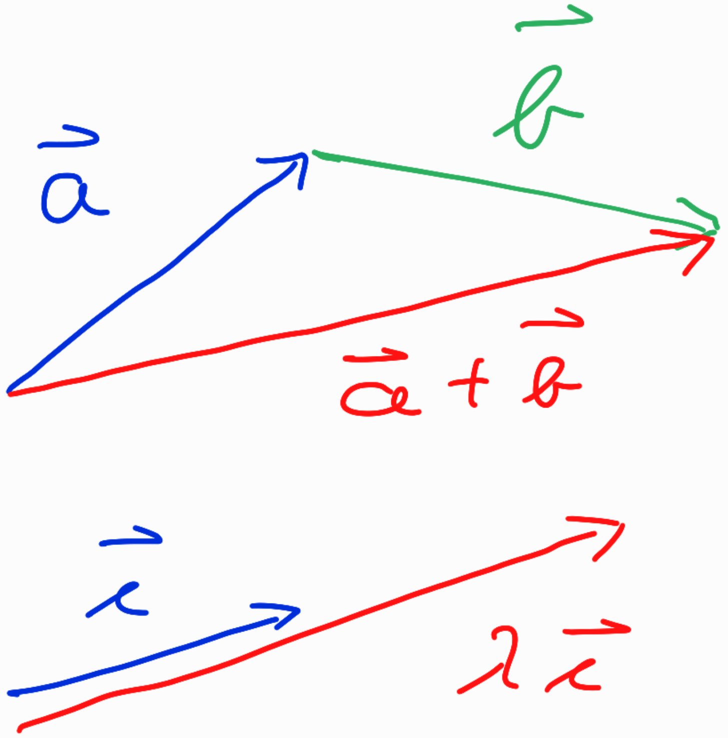
(S1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

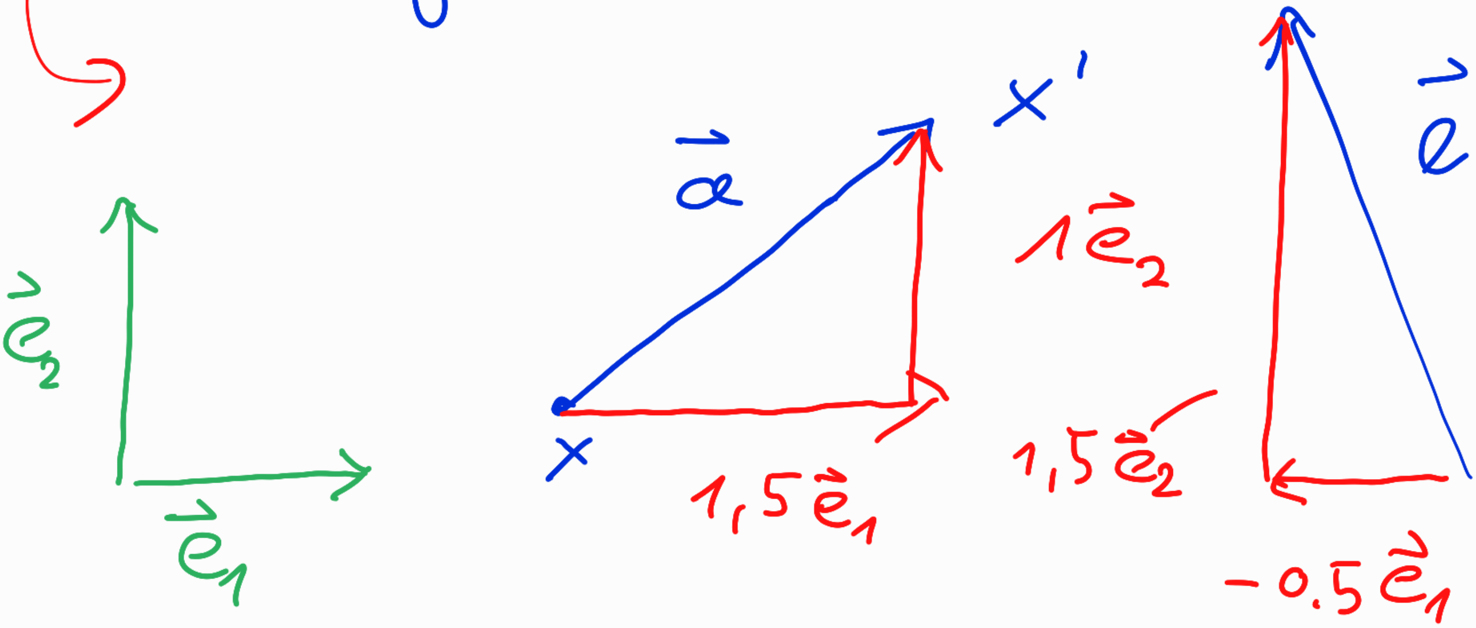
(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

geometrisch motiviert!




<u>heute</u>: $\rightarrow$

## Basis, Dimension, Komponentendarstellung; Linearkombination, lineare Unabhängigkeit, Vollständigkeit




$$\vec{a} = 1{,}5\,\vec{e}_1 + 1\,\vec{e}_2$$

$$\vec{b} = -0.5\,\vec{e}_1 + 1\,\vec{e}_2$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bilden Basis

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

$\leadsto$ $$\vec{a} = \underline{\underline{a_1}}\,\vec{e}_1 + \underline{\underline{a_2}}\,\vec{e}_2 = \sum_{l=1}^{2} a_l \vec{e}_l = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B$$

Komponentendarstellung von $\vec{a}$ bzgl. Basis $B$

$a_1, a_2$ : Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. $B$

Rechnen in Komponenten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B \qquad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

warum?

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}_B \qquad \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

warum?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

$$\vec{a}+\vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

$$= \underbrace{a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_1} + a_2\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_2$$

$$= (a_1+b_1)\vec{e}_1 + (a_2+b_2)\vec{e}_2$$

$$= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}_B$$

Verallgemeinerung für beliebige Vektorräume:

dazu notwendig:

- Linearkombinat.
- Lineare Unabhängigkeit
- Vollständigkeit

Die Linearkombination von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in V$ mit Skal. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ist der Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{a}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \vec{a}_\ell$$

# Lineare Unabhängigkeit

Ein System von Vektoren

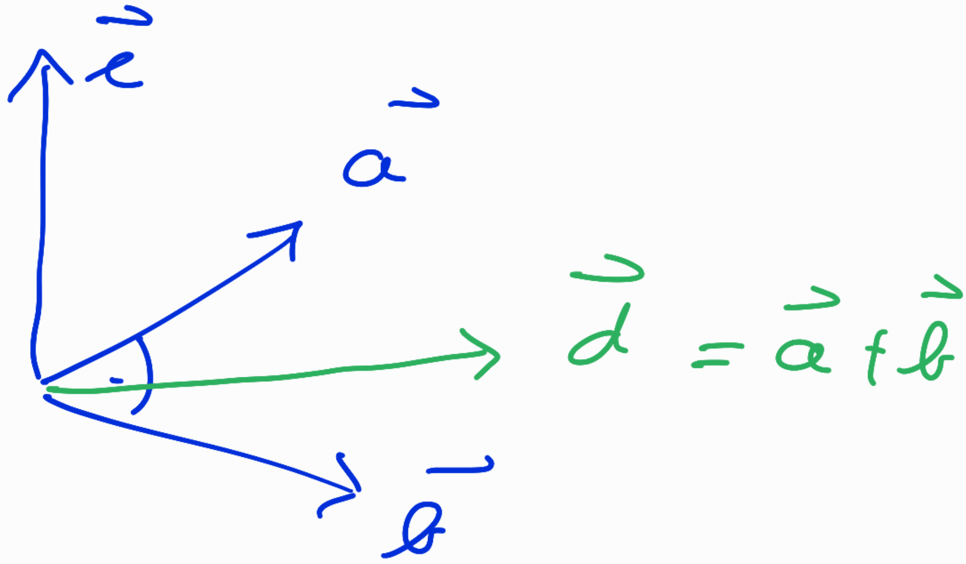
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$$

ist **linear unabhängig**, g.d.w. sich den Nullvektor $\vec{0}$ nur trivial bilden lässt, d.h.

$$\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \dots + 0\vec{a}_k$$

ist die einzig mögliche L.K., andernfalls ist das System **linear abhängig**.

**Beispiel:**



- $(\vec{a}, \vec{b})$ : lin. unabhängig

$\left( \vec{0} \overset{!}{=} \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} \right.$

$\left. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \; ! \right)$

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ : lin unabhäng.

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ : lin abhängig

$\left( \text{denn } \vec{0} = 1\vec{a} + 1\vec{b} - 1\vec{d} \right)$

- $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{e})$ : lin unabhängig

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}, \vec{d})$ : lin abhängig

$\left( \text{denn } \vec{0} \overset{!}{=} 1\vec{a} + 1\vec{b} - 1\vec{d} + 0\vec{c} \right)$.

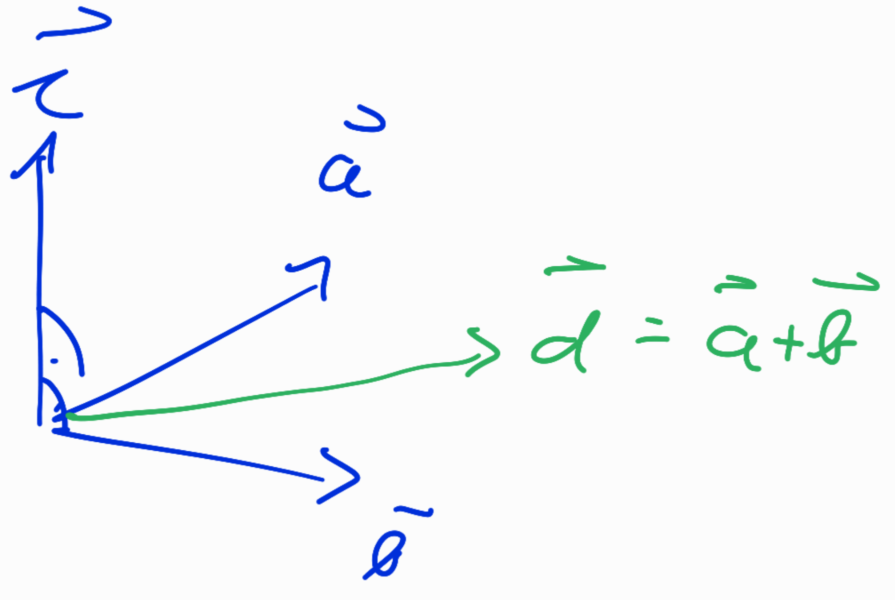
# Vollständigkeit

Ein System von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in V$ ist vollständig (ist ein erzeugenden System) g.d.w. sich jeden Vektor $\vec{v} \in V$ als Lin. Komb. der $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_k$ bilden lässt; d.h.

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k .$$

Beispiel:

3-dim Translationen



$(\vec{a}, \vec{b})$ : nicht vollst. !

$(\vec{c} \neq \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ : vollständig !

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ : nicht vollst. !

$(\vec{c} \neq \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{d})$

<u>Basis</u>

Eine Basis eines VRs $V$ ist ein zugleich linear unabhängiges und vollständiges System von Vektoren

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \in V$

$$\curvearrowright \quad \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_l \vec{e}_l$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

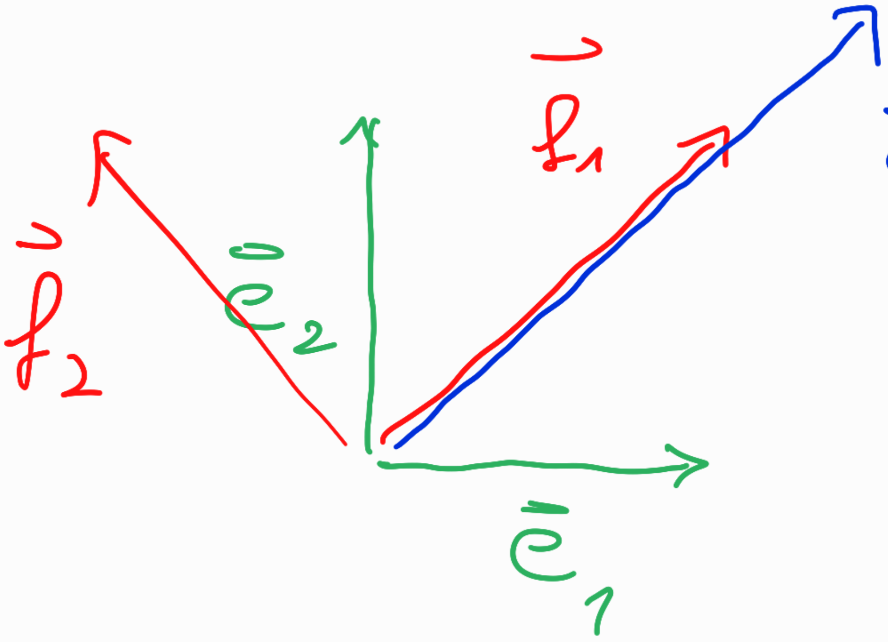
Komponentendarstellung von $\vec{a}$ bzgl. Basis $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

Komponenten $\vec{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ sind eindeutig bestimmt!

⚠ Komponenten sind abhängig von gewählten Basis!

Bsp:

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$




$\vec{a} = 1{,}2\,\vec{f}_1$

$B' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$

$$\vec{a} = 1{,}2\,\vec{e}_1 + 1{,}2\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}_B$$

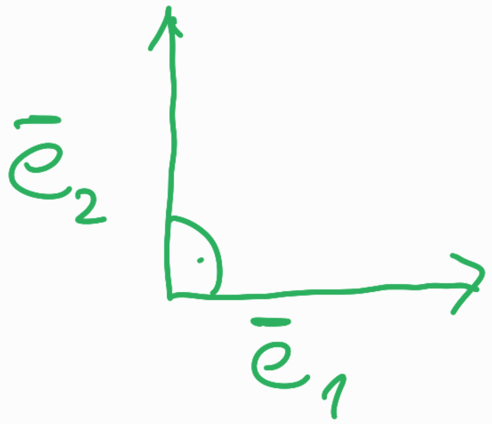
$$= 1{,}2\,\vec{f}_1 + 0\,\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

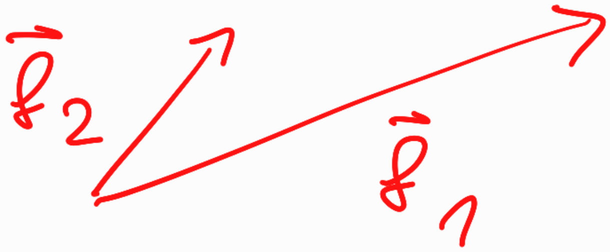
Dimension eines Vektorraums = Anzahl der Basisvektoren!

<u>Satz</u>

<u>Jede</u> Basis eines VRs hat dieselbe Anzahl an Basisvektoren.

# 2D-Translationen:




$(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$

Basis!