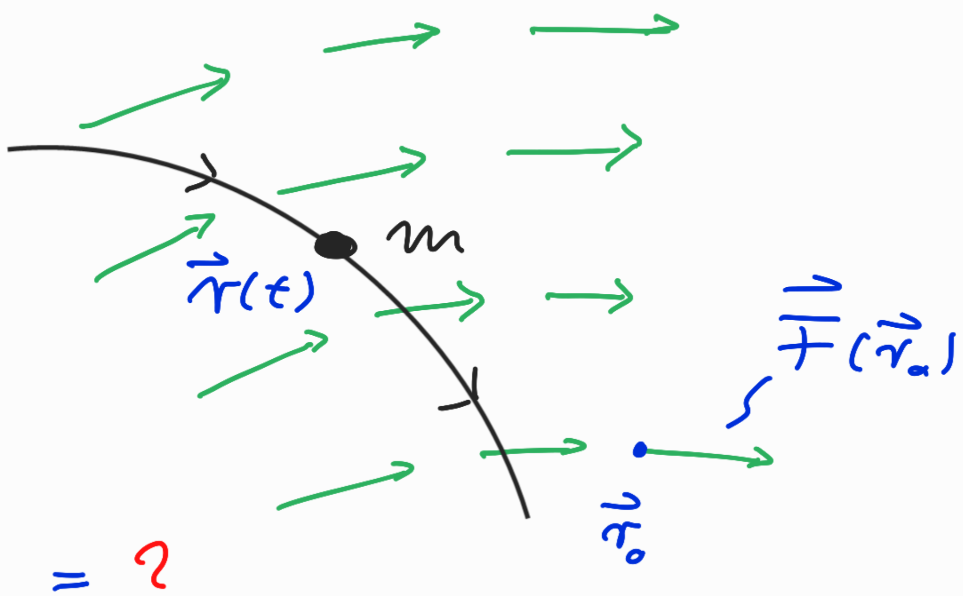
Newtonsche Mechanik:

konservatives Kraftfeld, Energieerhaltung, Zentralkraftfeld, Drehimpulserhaltung, Flächensatz, Planetenbahnen

Massenpunkt im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$



Bahn $\vec{r}(t) = ?$

Newtonsche Bewegungsgleichung !

$$\boxed{m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))}$$

(DGL 2. Ordnung)

Konservatives Kraftfeld

$=$ "Gradientenfeld"

Erinnerung: Gradient

Fkt. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(n=3)$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{r}) = f(x,y,z)$$

$$\rightsquigarrow \quad \text{grad}\, f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(\vec{r})$$

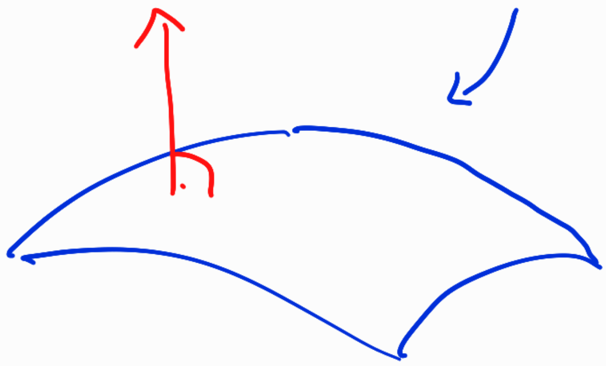
$$\rightsquigarrow \quad \boxed{f(\vec{r}_0 + \vec{h}) = f(\vec{r}_0) + \langle \text{grad}\, f(\vec{r}_0), \vec{h} \rangle}$$

lineare Näherung von f in $\vec{r}_0$

Eigenschaften:

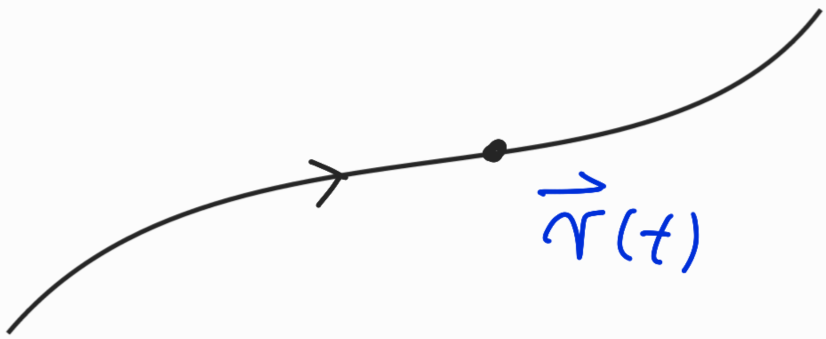
1) $\operatorname{grad} f(\vec{r}) \parallel$ Richtung des stärksten Anstiegs von f in $\vec{r}$

2) $\operatorname{grad} f(\vec{r}) \perp$ Hyperfläche $f(\vec{r}) \overset{!}{=} c$



neu: 3)

Bahn $\rightsquigarrow$



"Skalarfeld" = Fkt. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle}$$

in linearer Näherung:

$$f(\vec{r}(t+\Delta t)) = f(\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t)$$

$$= f(\vec{r}(t)) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle}_{\hat{=} \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t))} \Delta t$$

Konservatives Kraftfeld (allg.: Vektorfeld)

$\vec{F}(\vec{r})$ ist <u>konservativ</u>

$:\Longleftrightarrow$ $-\vec{F}(\vec{r})$ ist <u>Gradientenfeld</u> einer geeignet gewählten Fkt. $U(\vec{r})$, d.h.

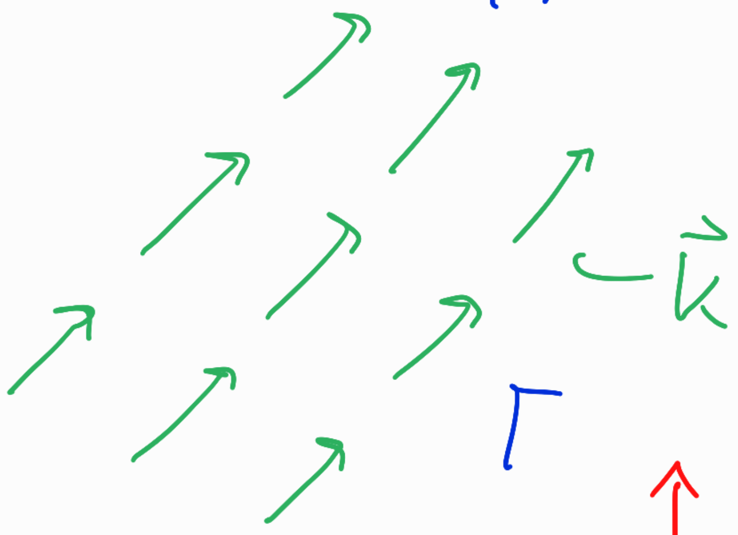
$$\vec{F}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} -\mathrm{grad}\, U(\vec{r}),$$

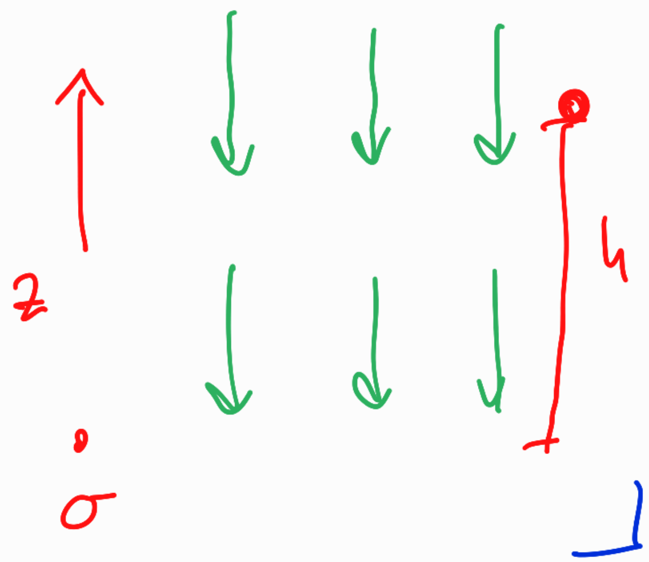
(für alle $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$)

$U(\vec{r})$ ist Potenzial zu $\vec{F}(\vec{r})$

Beispiele:

1) konstantes Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{K}$





konservativ!

$$\operatorname{grad} \langle \vec{r}, \vec{k} \rangle \overset{!}{=} \vec{k}$$

$\Rightarrow$ $U(\vec{r}) = -\langle \vec{r}, \vec{k} \rangle$ ist

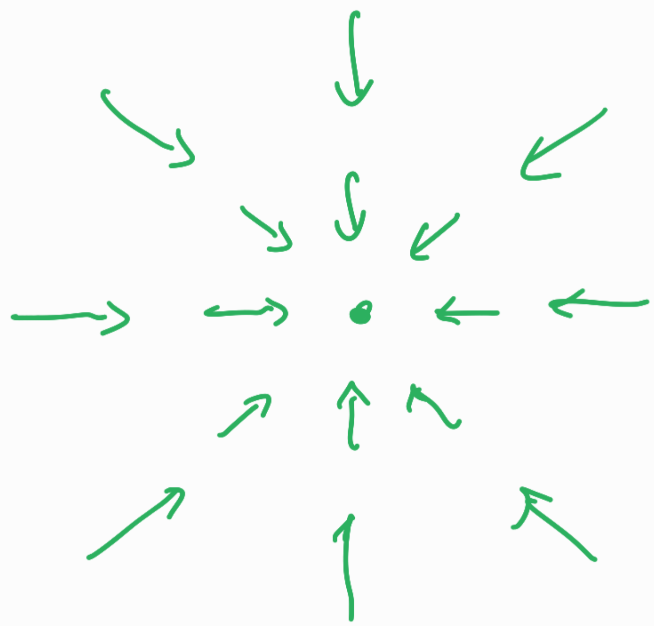
Potential zu $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{k}$!

$\vec{k} = -mg\hat{z}$: $\rightsquigarrow$ $U(\vec{r}) = mg \langle \hat{z}, \vec{r} \rangle$

$= mgz$

2) Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r}$

$(k>0)$



konservativ!

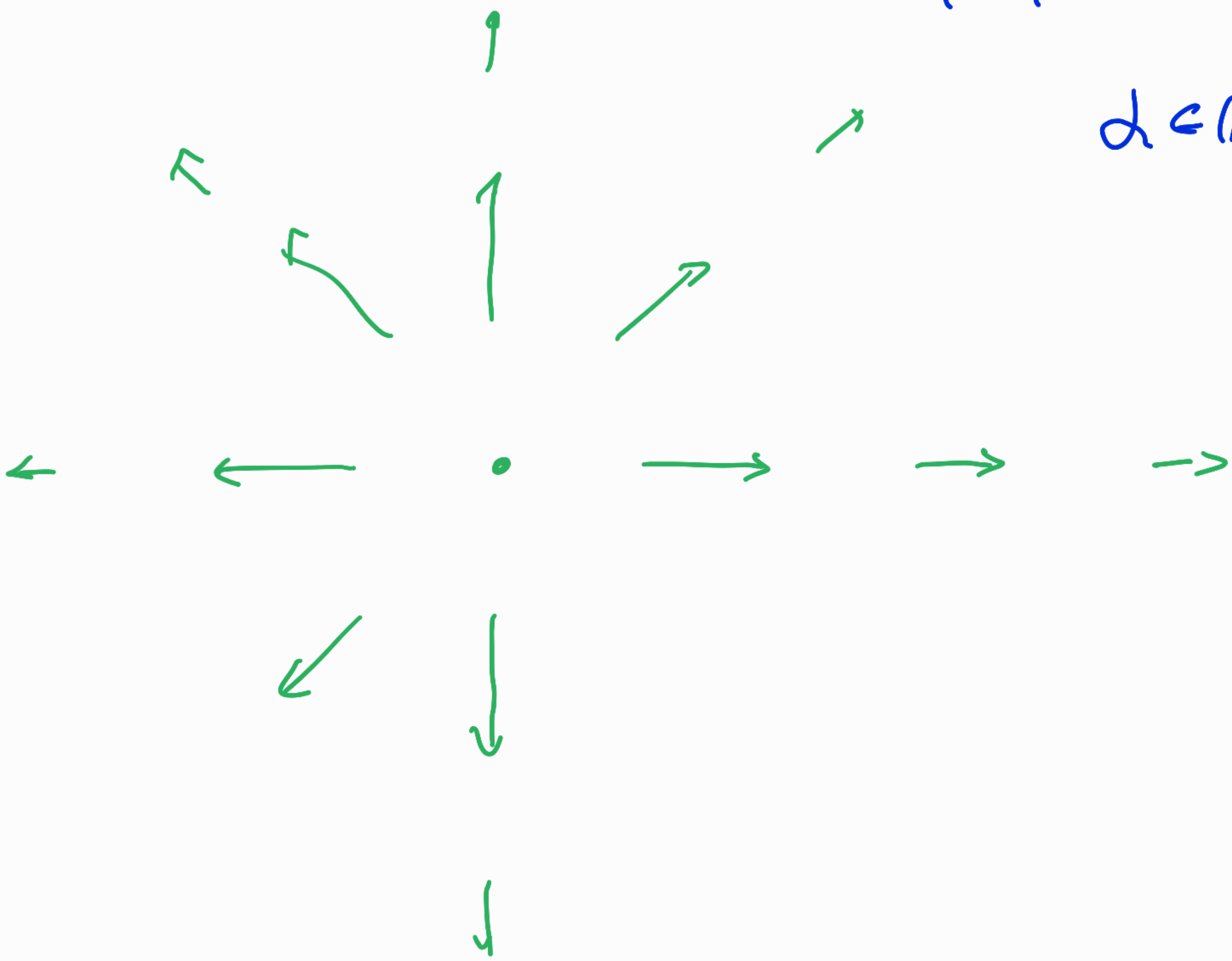
$$\operatorname{grad}|\vec{r}|^2 = 2\vec{r}$$

$$-\operatorname{grad}\underbrace{\left(\frac{k}{2}|\vec{r}|^2\right)}_{\stackrel{!}{=}\,U(\vec{r})} = -k\,\vec{r} \stackrel{!}{=} \vec{F}(\vec{r})$$

mit Potential $U(\vec{r}) = -\frac{k}{2}|\vec{r}|^2$

3) Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \frac{1}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$

$\alpha \in \mathbb{R}$



konservativ !

$$\operatorname{grad} h(|\vec{r}|) \overset{!}{=} h'(|\vec{r}|)\, \hat{r}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow h(x) = -\frac{1}{x}$$

mit Potential: $U(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|}$!

Anmerkungen:

1) Potenzial nicht eindeutig:

mit $U(\vec{r})$ auch

$$\tilde{U}(\vec{r}) = U(\vec{r}) + c$$

Potenzial von $\vec{F}$!

2) $d=1$:

$F(x)$ ist konservativ

:<=> es gibt $U(x)$

derart, dass

$$F(x) = -U'(x)$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial x}(x) .$$

$$\rightarrow \quad U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

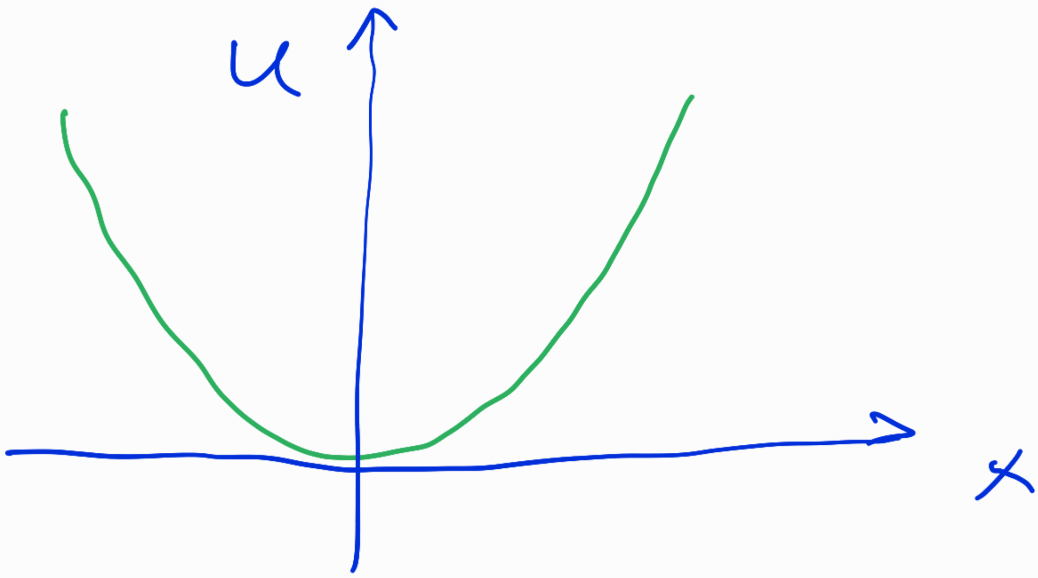
ist Potenzial zu $F(x)$!

<u>Beispiel</u>:

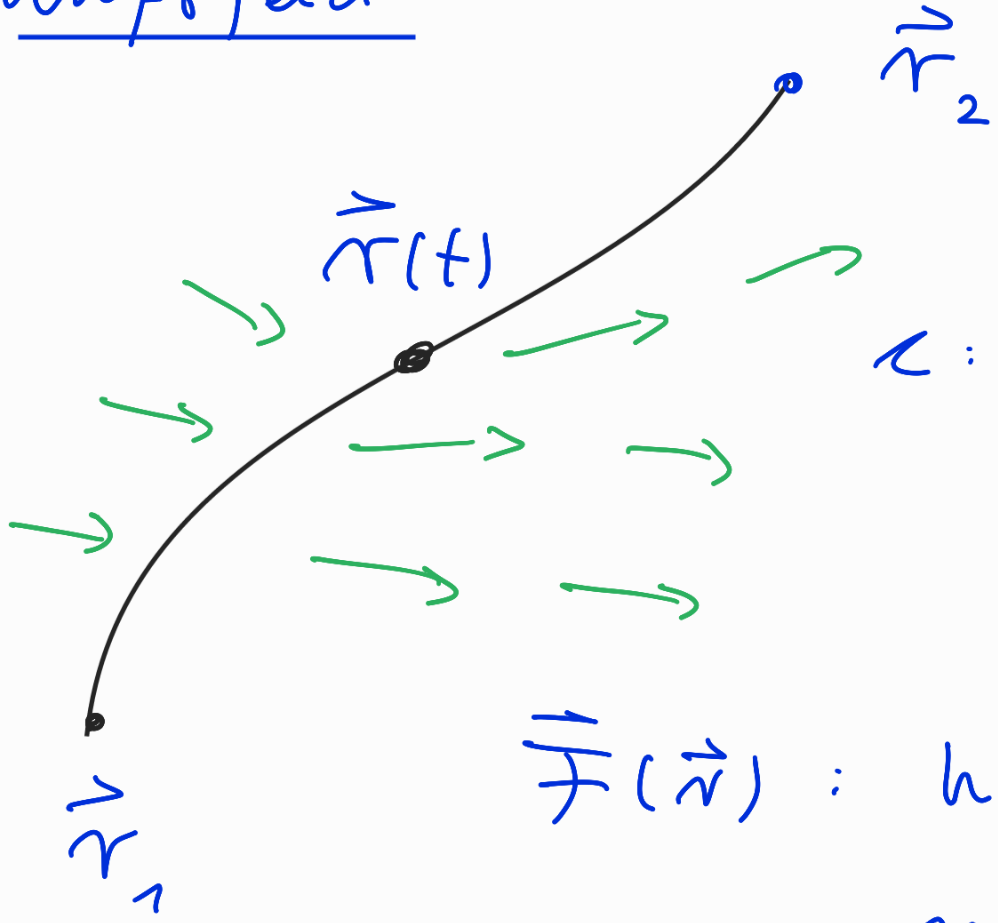
$$F(x) = -k\,x$$

$$\rightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2} k\, x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$



Wegintegral über konservatives Kraftfeld



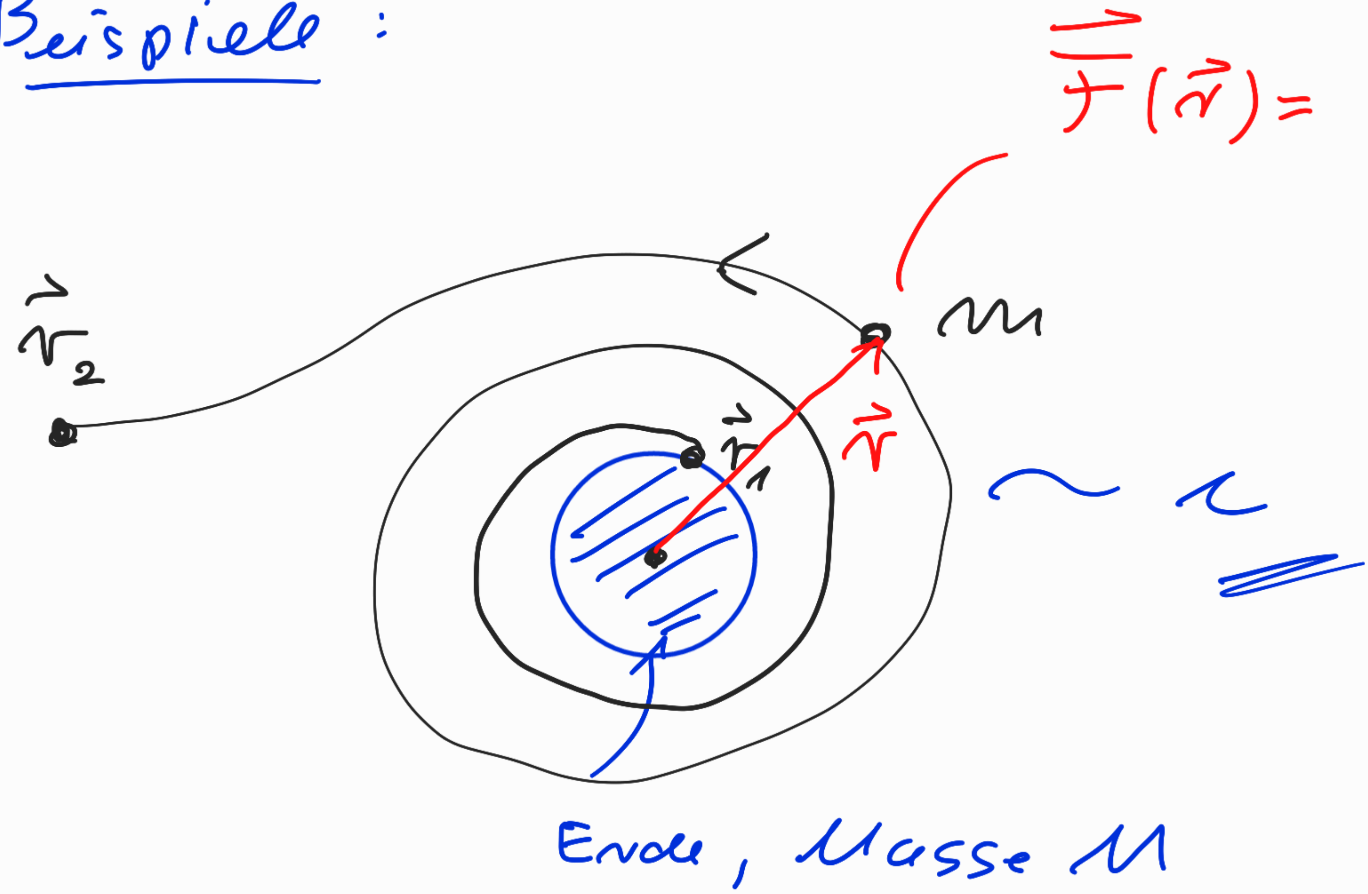
$c: t \mapsto \vec{r}(t)$

$\vec{F}(\vec{r})$: konservativ mit Potential $U(\vec{r})$

$$\boxed{-\int_c \vec{F}\, d\vec{l} \overset{!}{=} U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) \qquad (*)}$$

Arbeit $\overset{!}{=}$ Potentialdifferenz

Beispiele :



Arbeit W, um MP m von $\vec{r}_1 \longrightarrow \vec{r}_2$ im Gravitations Feld der Erde zu bewegen?

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha \frac{\hat{r}}{r^2}} \quad ; \quad \alpha = GmM$$

$\rightarrow$ $U(\vec{r}) = -\dfrac{\alpha}{r}$ ist Potential

zu $\vec{F}(\vec{r})$ ✓

$$\leadsto \quad W = - \int_C \vec{F}\, d\vec{l}$$

$$= U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad !$$

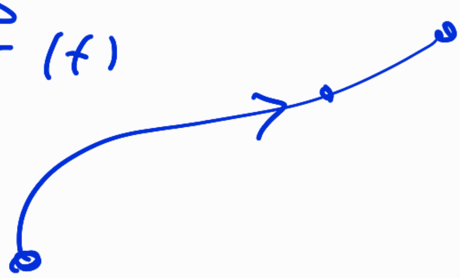
$$U(\vec{r}) = - \frac{\alpha}{r} \, .$$

Warum gilt

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{l} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad ?$$

$$\vec{F}(\vec{r}) \overset{!}{=} - \operatorname{grad} U(\vec{r}) \; ;$$

$c : t \to \vec{r}(t)$



$\vec{r}_2 , t_2$

$\vec{r}_1 , t_1$

$$\int_c \vec{F}\, d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \langle \vec{F}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle \, dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\langle \operatorname{grad} U(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle}_{\overset{!}{=}\ \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t))} \, dt$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} - U(\vec{r}(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} = U(\underbrace{\vec{r}(t_1)}_{=\vec{r}_1}) - U(\underbrace{\vec{r}(t_2)}_{=\vec{r}_2})$$

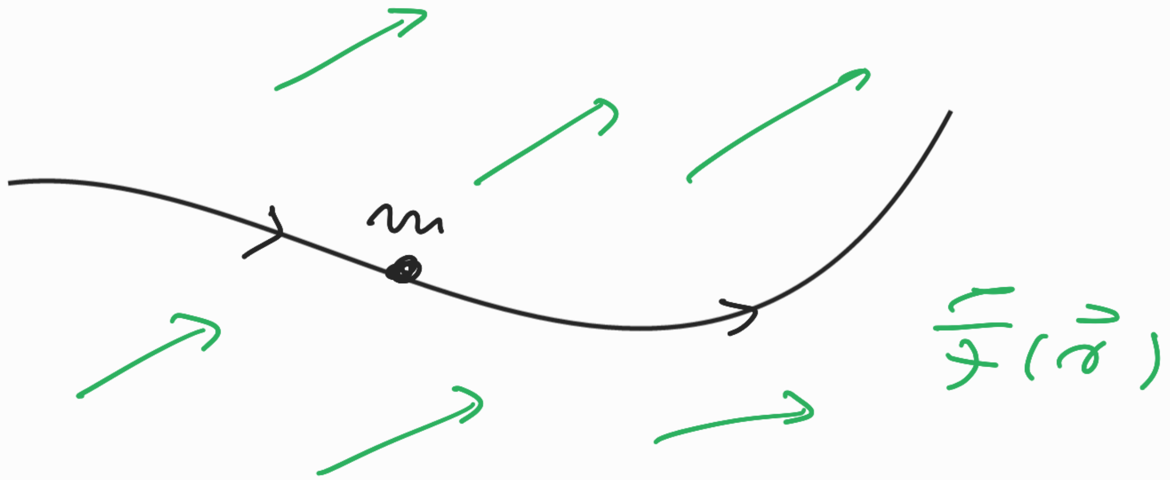
Energieerhaltungssatz

(MP im konservativ. K.F.)

Teilchen der Masse m bewege sich aufgrund konservativen Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$$

auf Bahn $\vec{r}(t)$,



d.h. $\quad m\,\ddot{\vec{r}}(t) \stackrel{!}{=} \vec{F}(\vec{r}(t))$

Die Gesamtenergie des Teilchens

$$E(t) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}(t)|^2 + U(\vec{r}(t))$$

ist konstant! (*)

$U(\vec{r}(t))$: potenzielle Energie

$\frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}(t)|^2$: kinetische Energie

Warum gilt (*) ?

z.Z.: $\frac{dE(t)}{dt} = 0$!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} \underbrace{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^2}_{\langle \dot{\vec{r}}(t),\, \dot{\vec{r}}(t)\rangle} + U(\vec{r}(t)) \right)$$

$$= m \langle \ddot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle$$

$$+ \langle \operatorname{grad} U(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle$$

$$= \langle \underbrace{m \ddot{\vec{r}}(t)}_{= \vec{F}(\vec{r}(t)) = -\cancel{\operatorname{grad} U(\vec{r}(t))}} + \cancel{\operatorname{grad} U(\vec{r}(t))}, \dot{\vec{r}}(t) \rangle$$

$$= \langle \vec{0}, \dot{\vec{r}}(t) \rangle = 0 \quad !$$