Letzte Vorlesung:

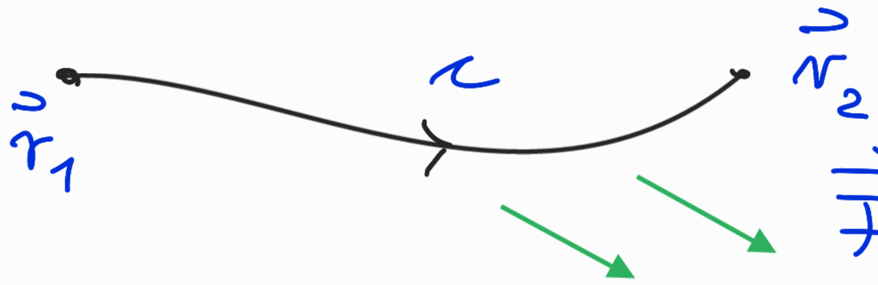
- $$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle$$

- $\vec{F}(\vec{r})$ <u>konservativ</u>

  $:\Longleftrightarrow$ es ex. $U(\vec{r})$ s.d.

  $$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})}$$

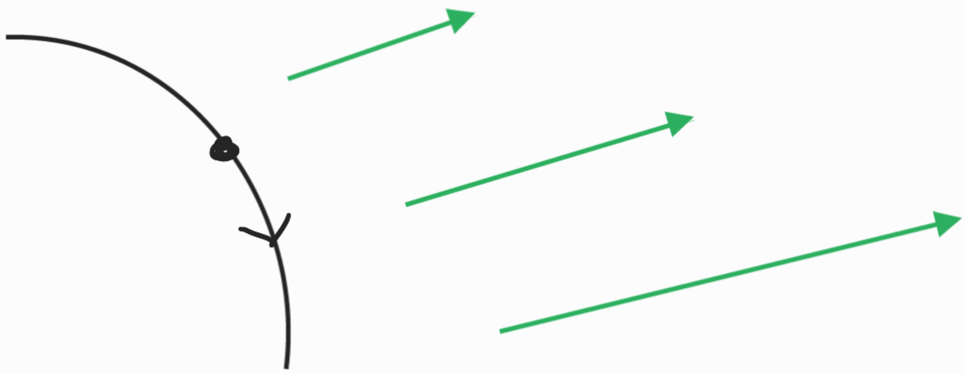
  <u>Potenzial</u> zu $\vec{F}$

- 

  $\vec{F}$ <u>konservativ</u>

$\rightsquigarrow$ $$\boxed{-\int_c \vec{F}\, d\vec{l} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)}$$

- <u>Energieerhaltungssatz</u> :



$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

$$= - \operatorname{grad} U(\vec{r}(t))$$

$$\rightarrow \boxed{E = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}(t)|^2 + U(\vec{r}(t)) \quad \text{konstant !}}$$

$$E_{kin}(t) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}(t)|^2$$

$$E_{pot}(t) = U(\vec{r}(t))$$

$E_{kin}(t) \geq 0$!

$\rightarrow$ für alle Zeiten t:

$$\boxed{U(\vec{r}(t)) \leq E} = E_0$$

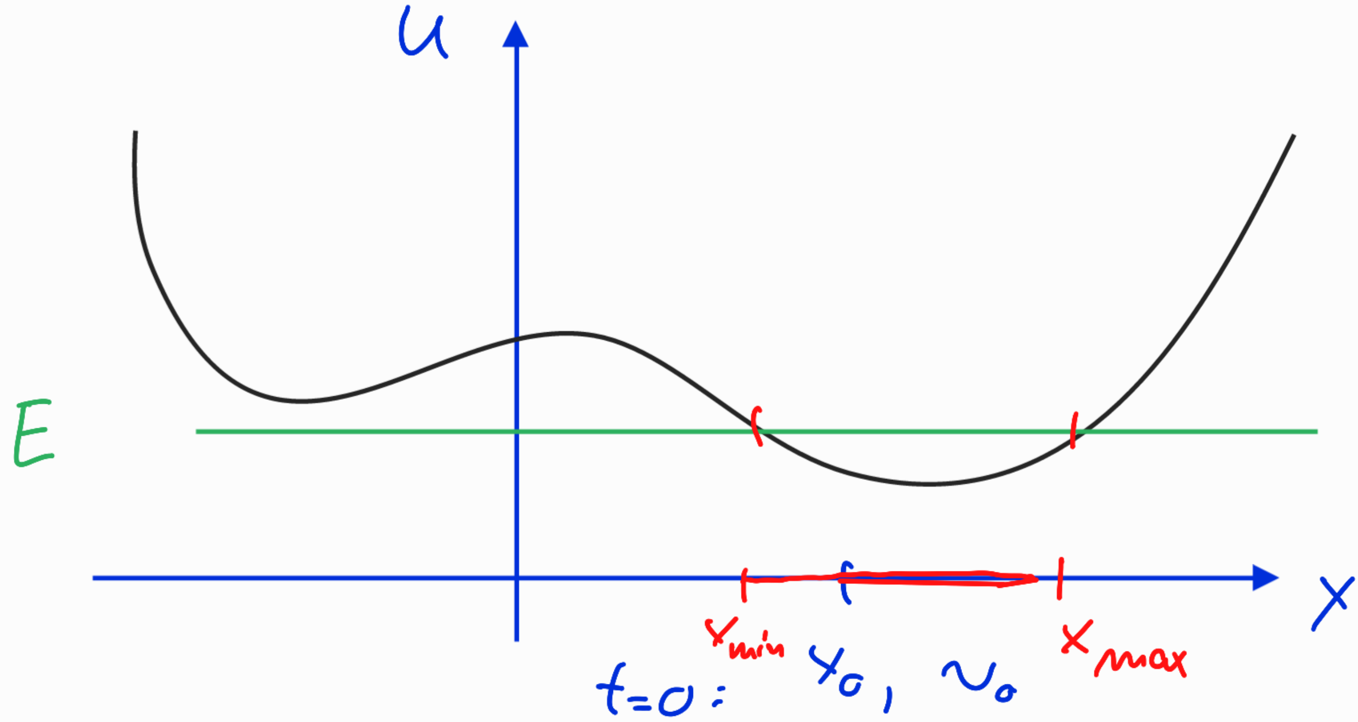
<u>Energiesatz im 1D:</u>

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x)$$

$$\rightarrow \quad m\ddot{x}(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x(t))$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + U(x(t))$$

konstant!



$$\rightsquigarrow \quad E = E(0) = \frac{m}{2} v_0^2 + U(x_0)$$

$\rightsquigarrow$ $x(t)$ oszilliert zwischen x_{min} und x_{max}

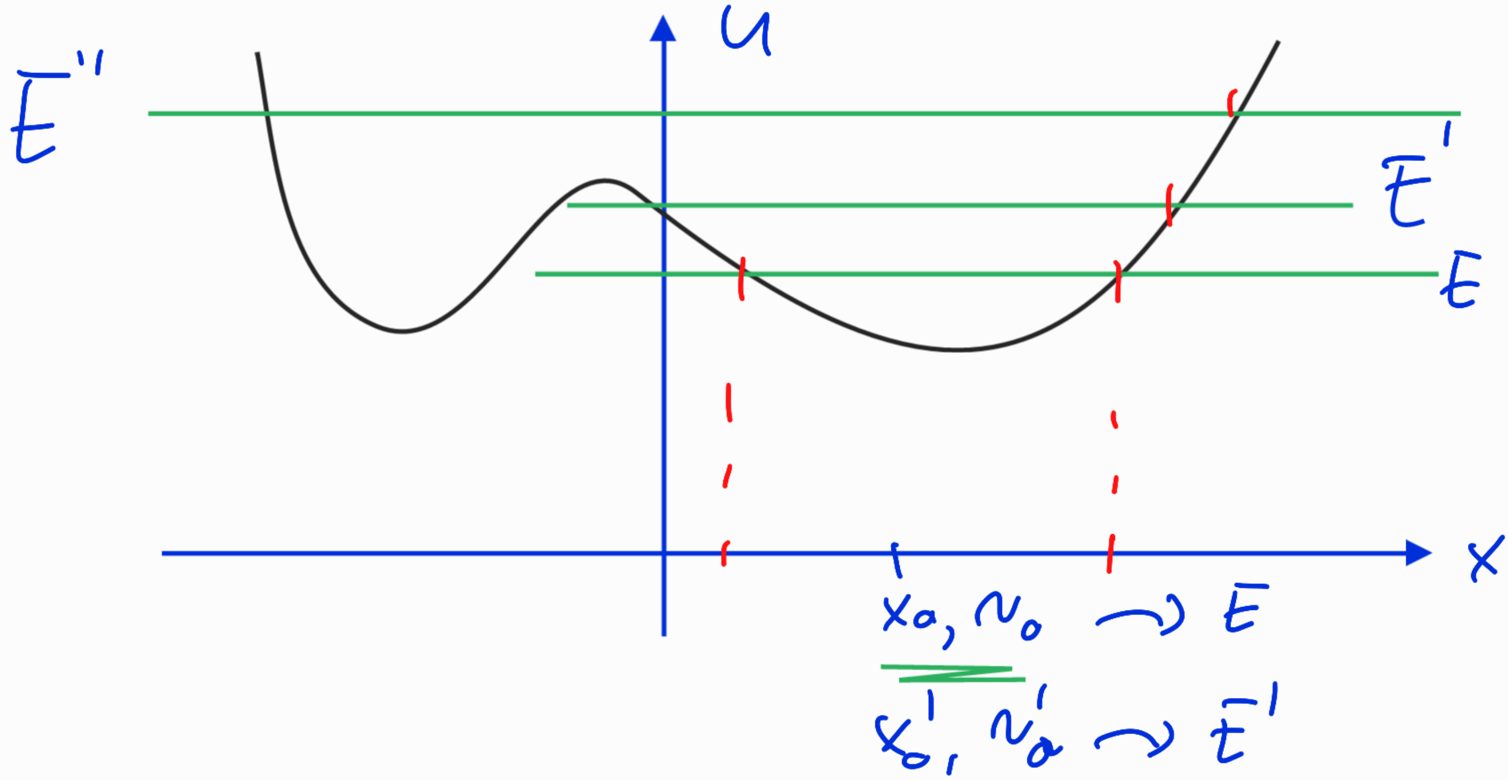
$$\hookrightarrow \quad U(x_{min/max}) = E$$

Darstellung der Bahnen im Phasenraumdiagramm:

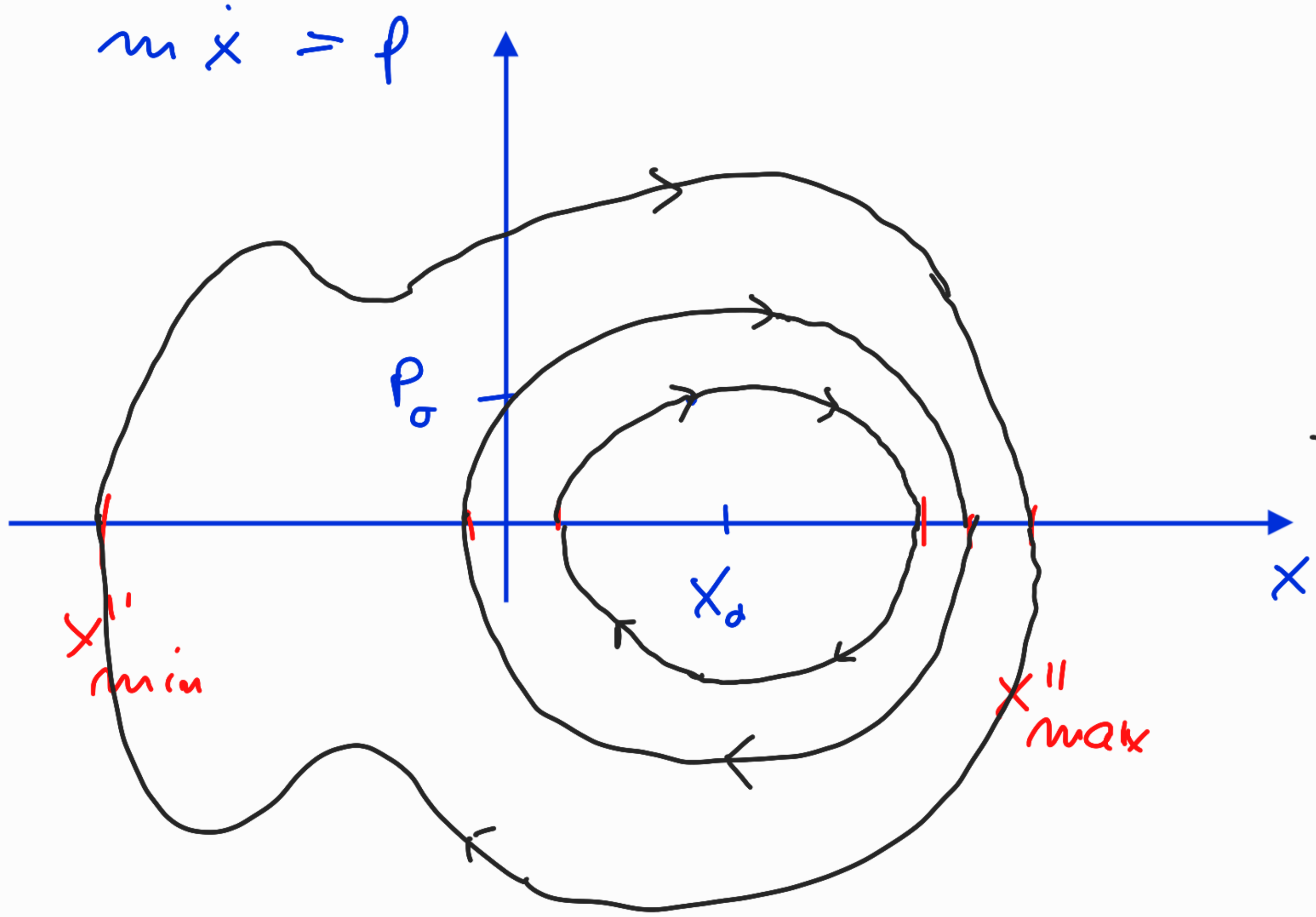
$\rightarrow$ Phase $\equiv$ Zustand $= (x, p)$

Ort Impuls

Impuls: $p := m\dot{x}$



u
E''
E'
E
x
x_0, v_0 → E
≠
x_0', v_0' → E'



mẋ = p
p_0
x
x_0
x''_min
x''_max

quantitativ: Bestimmung der Bahn $x(t)$ per Integration:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + U(x(t))$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x(t))\right)}}$$

nach Anfangsgeschw.:

$v_0 > 0$: „$+$"

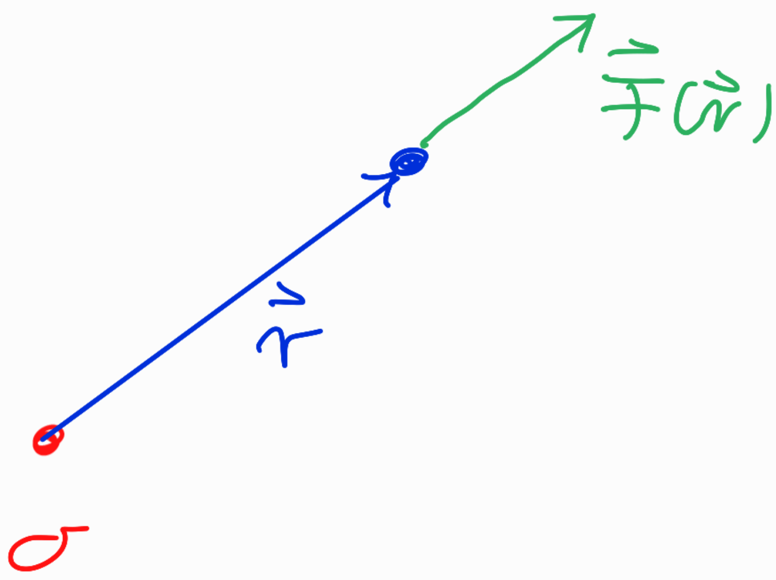
$v_0 < 0$: „$-$"

DGL 1. Ordnung für $x(t)$!

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}} = t - t_0$$

Teilchen im Zentralkraftfeld



$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}}$$

betrachte:

<u>Impuls</u>: $\vec{p} := m\dot{\vec{r}}$

<u>Drehimpuls</u>: $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \qquad (*)$$

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \neq 0$$

<u>Drehimpuls</u>:

$$\vec{L} \perp \vec{r}, \quad \vec{L} \perp \vec{p}$$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=\vec{0}} + \overbrace{\vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{=\vec{F}(\vec{r})\,\parallel\,\vec{r}}}^{=\vec{0}} = \vec{0}$$

Zentral-kraft

$\rightarrow$ $\vec{L}$ ist konstant!

Drehimpulserhaltung!