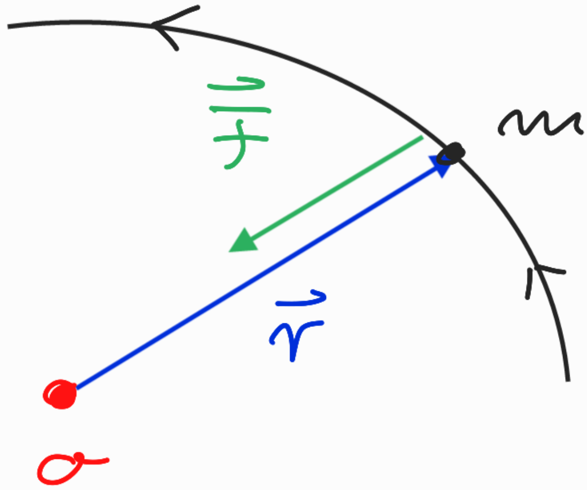
Letzte Vrlsg.:

Teilchen im Zentralkraftfeld



$$\boxed{\vec F(\vec r) \parallel \vec r}$$

Drehimpulserhaltung:

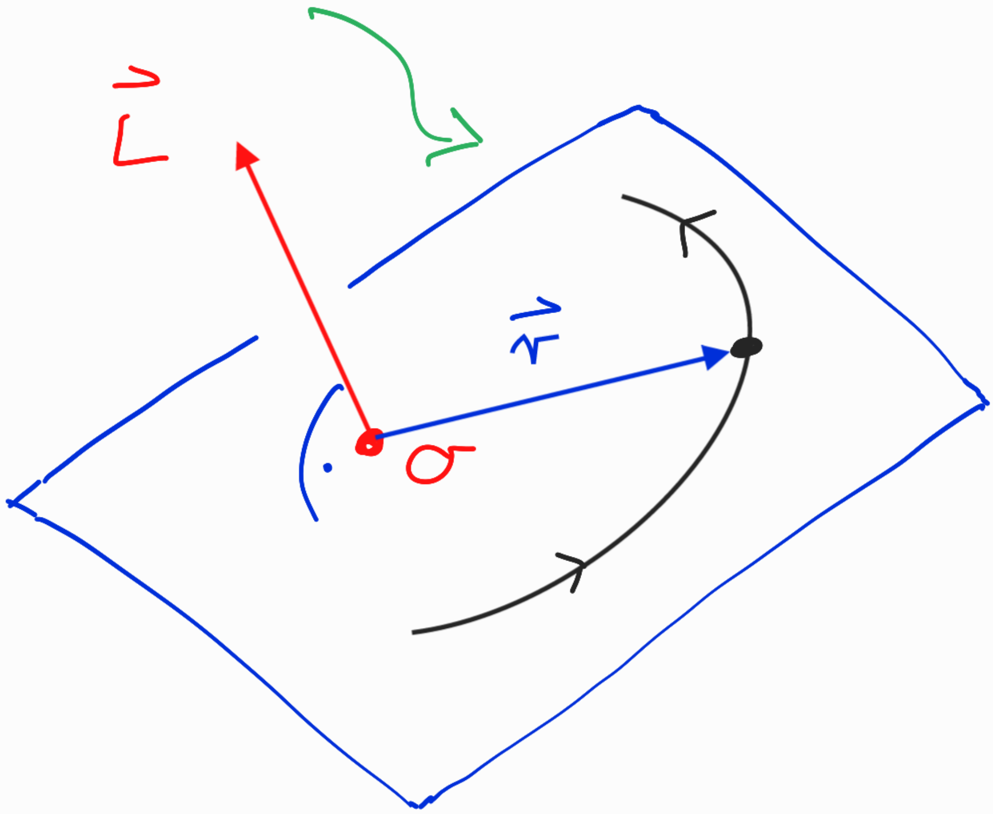
$$\boxed{\vec L(t) = \vec r(t) \times \vec p(t) = \text{konst.} \;!}$$

$$\left[\; \dot{\vec L} = \frac{d}{dt}(\vec r \times \vec p) = \underbrace{\dot{\vec r} \times \vec p}_{= \vec 0} + \overbrace{\vec r \times \dot{\vec p}}^{= \vec 0} = \vec 0 \;\right]$$

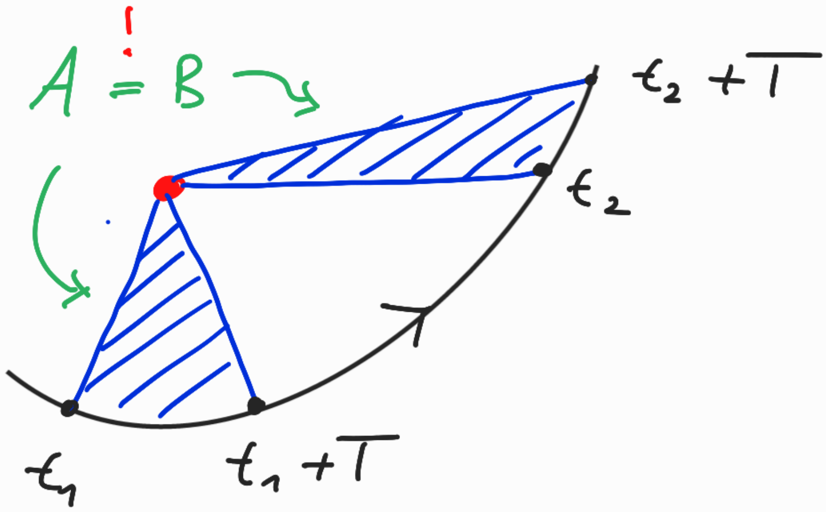
$\hookrightarrow \vec F(\vec r) \parallel \vec r$

Drehimpulserhaltung impliziert:

1) Bewegung verläuft für alle Zeiten in Ebene $E \perp \vec{L}$, $\sigma \in \vec{L}$:



2) Flächensatz (Kepler)



"Fahrstrahl" überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

zu 1': z.z.: für alle Zeiten t:

$$\boxed{\vec{r}(t) \perp \vec{L}_0}$$

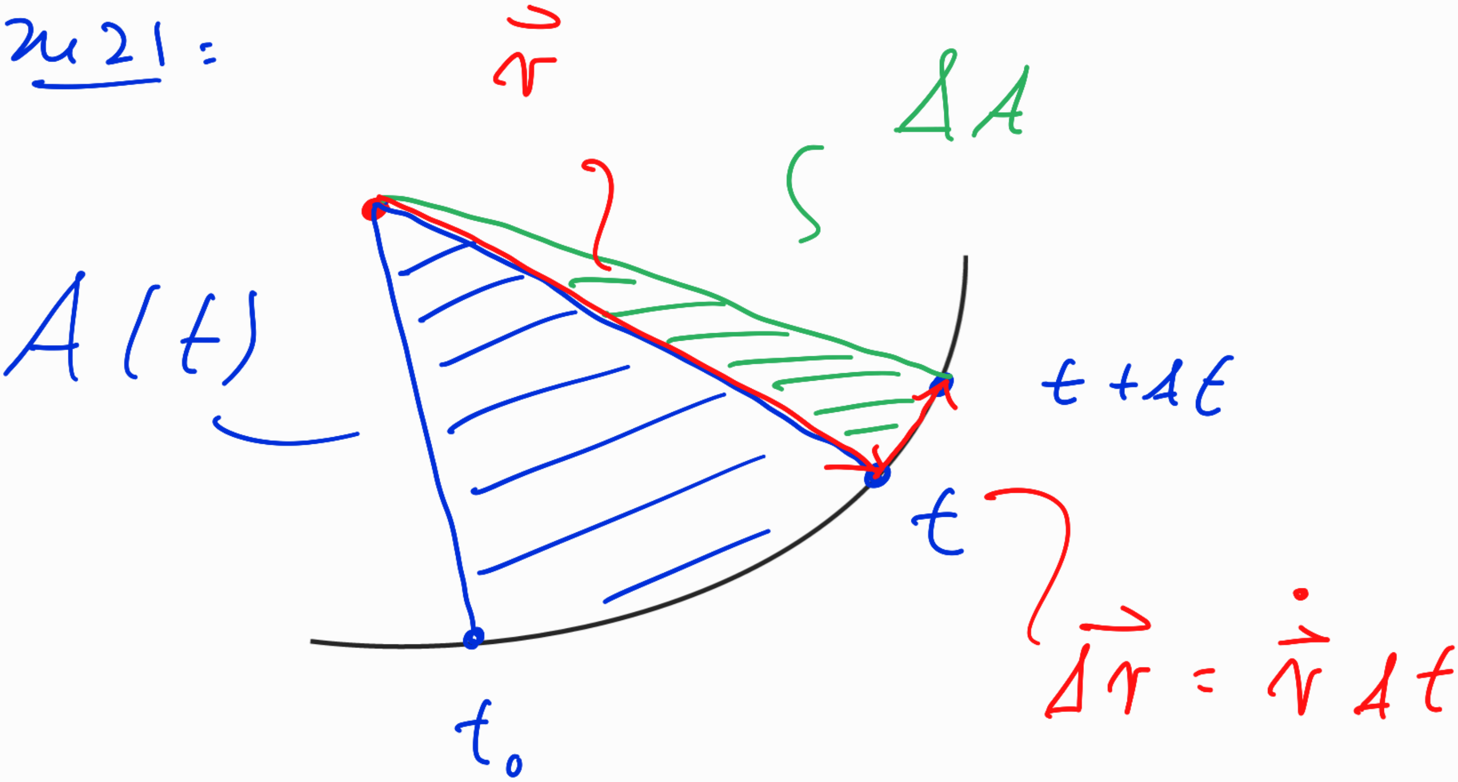
$\vec{L}_0 = \vec{L}(t_0) = \vec{r}_0 \times \vec{p}_0$

$\ulcorner$ $\langle \vec{r}(t), \vec{L}_0 \rangle = \langle \vec{r}(t), \vec{L}(t) \rangle$

$\vec{L}$ konstant!

$= \langle \vec{r}(t), \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) \rangle = 0!$ $\lrcorner$

zu 2':



$$\Delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}\,\Delta t = \frac{1}{m}\,\vec{p}\,\Delta t \qquad (*)$$

$$\rightarrow \Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \Delta\vec{r}\right|$$

$$= \frac{1}{2m}\,\underbrace{\left|\vec{r} \times \vec{p}\right|}_{\substack{\shortparallel \\ \vec{L} = \vec{L}_0 = \text{konstant!}}}\,\Delta t$$

„Flächengeschwindigkeit":

$$w = \frac{dA}{dt}(t) = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{|\vec{L}_0|}{2m}$$

konstant!

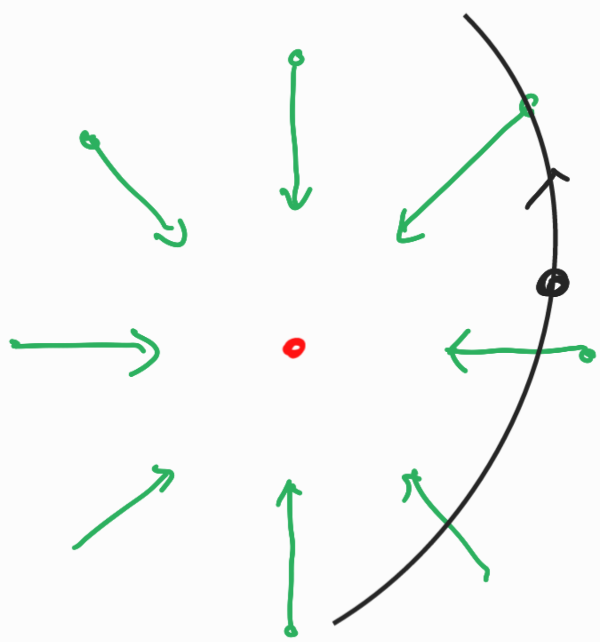
$$\rightarrow A_{t_0}(t) = w_0\, t$$

$\rightarrow$ Bel. !

Bewegung im isotropen Zentralkraftfeld

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\,\hat{r}}$$

$r = |\vec{r}|$



Bahn $\vec{r}(t)$

?

$\vec{F}(\vec{r})$ ist konservativ!

Potenzial $U(\vec{r}) = -G(r)$

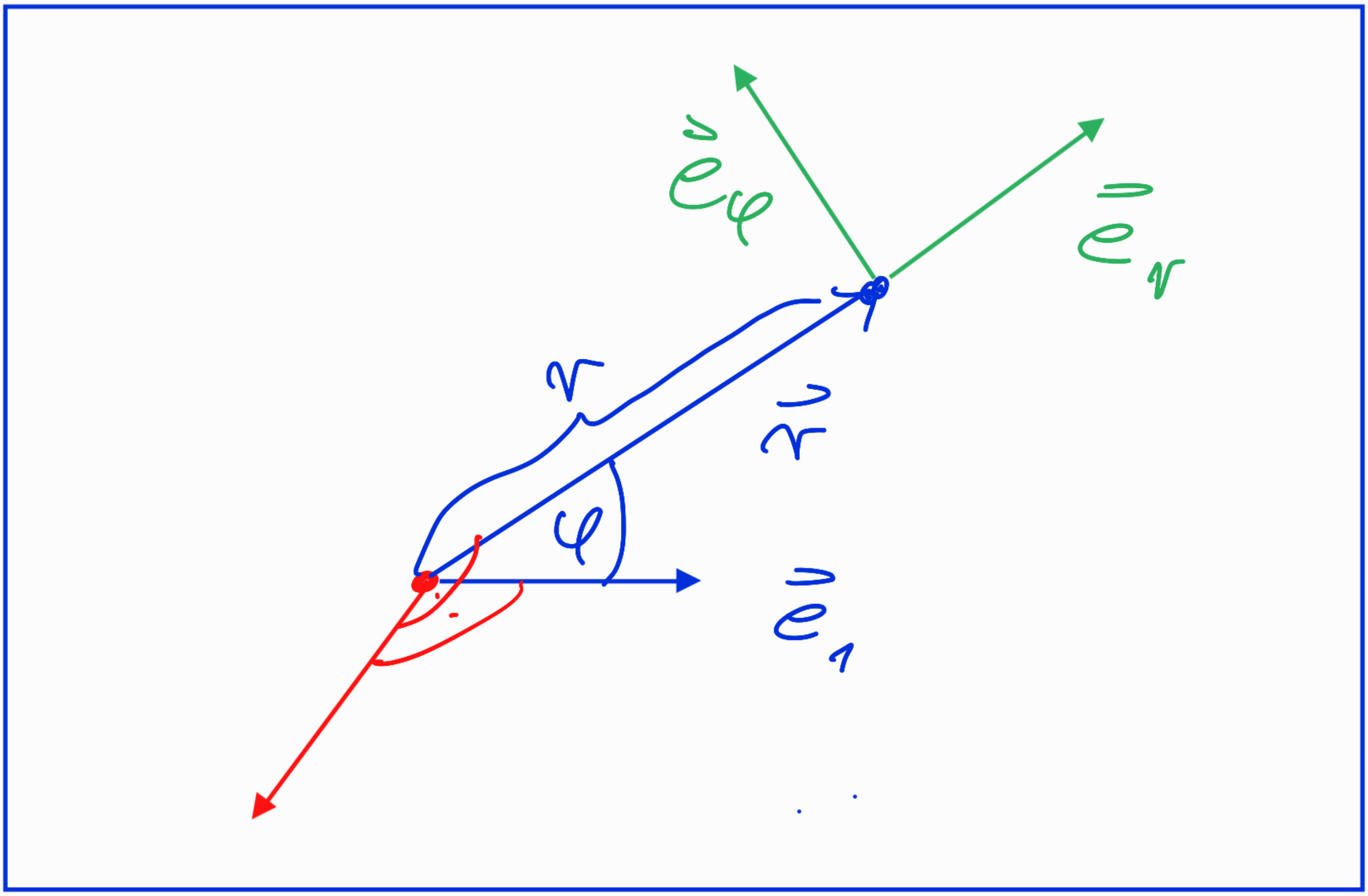
Aufgabe 46 a) Stammfkt. zu g: $G' = g$

- Drehimpulserhaltung
- Energieerhaltung

$\rightarrow$ Reduktion auf 1D-Problem!

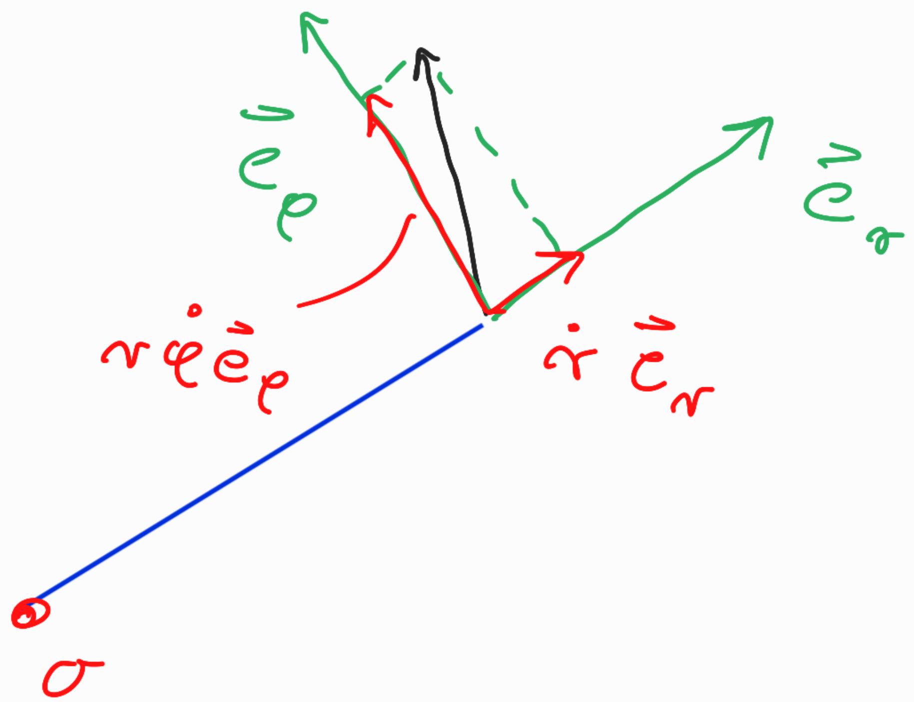
$\vec{L} = $ konst $\rightarrow$ Bahn in Ebene $E \perp \vec{L}$, $0 \in E$:

Polarkoordinaten in E



$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi} \quad (*)$$



Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\,\vec{e}_r \times m\,\dot{\vec{r}}$$

$$\overset{(*)}{=} m\; r\,\vec{e}_r \times (\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$$

$$= m r^2 \dot{\varphi}\; \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\,\vec{e}_z}$$

$$\rightarrow \quad \vec{L} = m r^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$l := |\vec{L}| = m r^2 \dot{\varphi}$$

$\vec{L}$ konstant! $\rightarrow$ l konstant!

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{m\, r(t)^2}} \quad (**)$$

Azimuthalgleichung

<u>Energie</u>

$$|\dot{\vec{r}}|^2 \overset{(*)}{=} \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

$$\overset{(**)}{=} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2}$$

$$\boxed{|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2}} \quad (3)$$

$$E = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + U(r)$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)}$$

Radialgleichung

1D DGL 1. Ordnung für $r(t)$

$\longrightarrow r(t)$

$\longrightarrow \varphi(t)$ (mit Azimutalgleichung)

Radialgleichung $\hat{=}$ Energiegleichung eines 1D-Teilchens im effektiven Potenzial $U_{eff}(r)$:

$$\boxed{U_{eff}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}}$$

zentrifugal-potential

effektives Potenzial

Explizit:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

$\frac{d}{dt}$

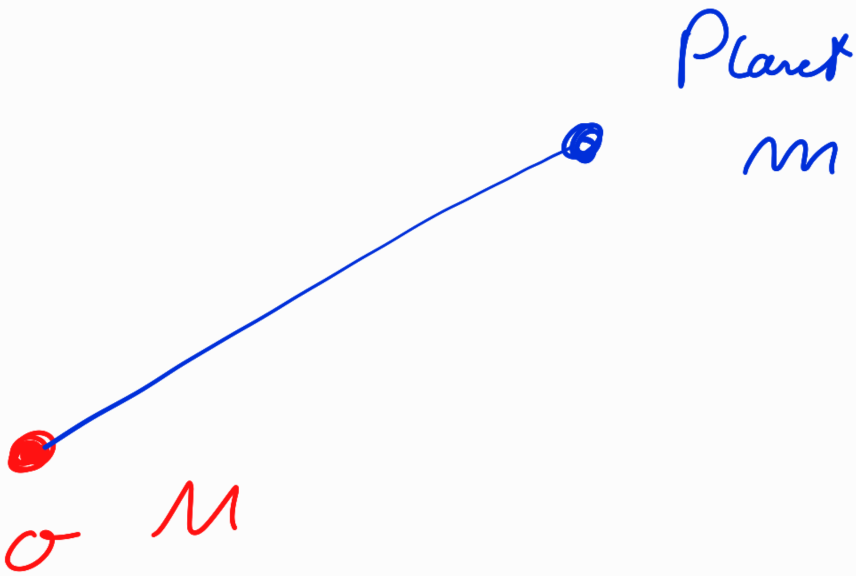
$$0 = m\dot{r}\ddot{r} + U_{eff}'(r)\,\dot{r} \qquad | : \dot{r}$$

$$\rightarrow \quad m\ddot{r}(t) = -U_{eff}'(r(t))$$

$$= F_{eff}(r(t))$$

1D Bewegungsgleichung für Teilchen im Pot. $U_{eff}(r)$!

Beispiel: Planetenbahn im Gravitationskraftfeld der Sonne:



$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = - G m M \frac{1}{r^2} \hat{r}}$$

$$= - \frac{\gamma}{r^2} \hat{r} \,; \qquad \gamma = G m M$$

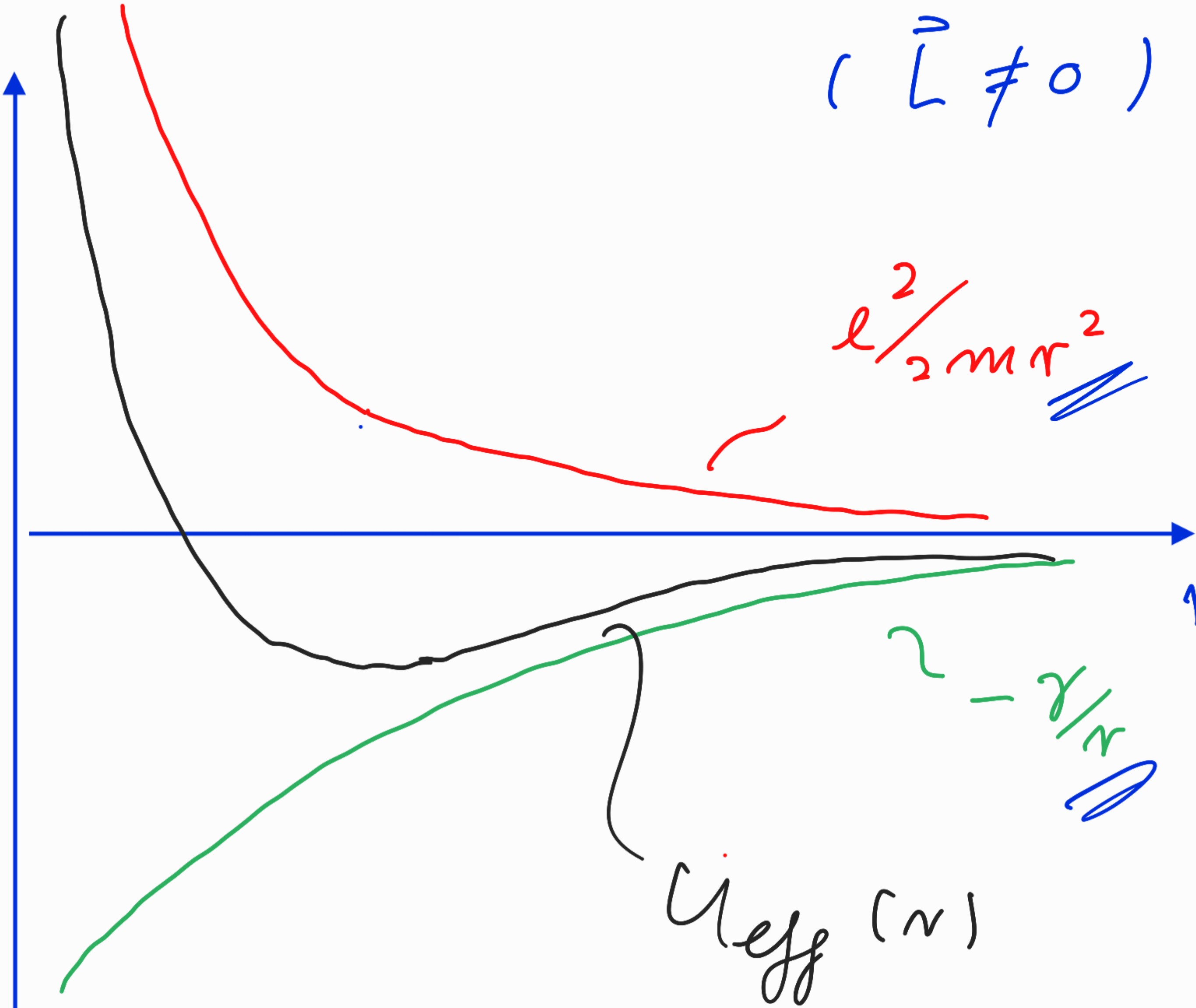
Potenzial:

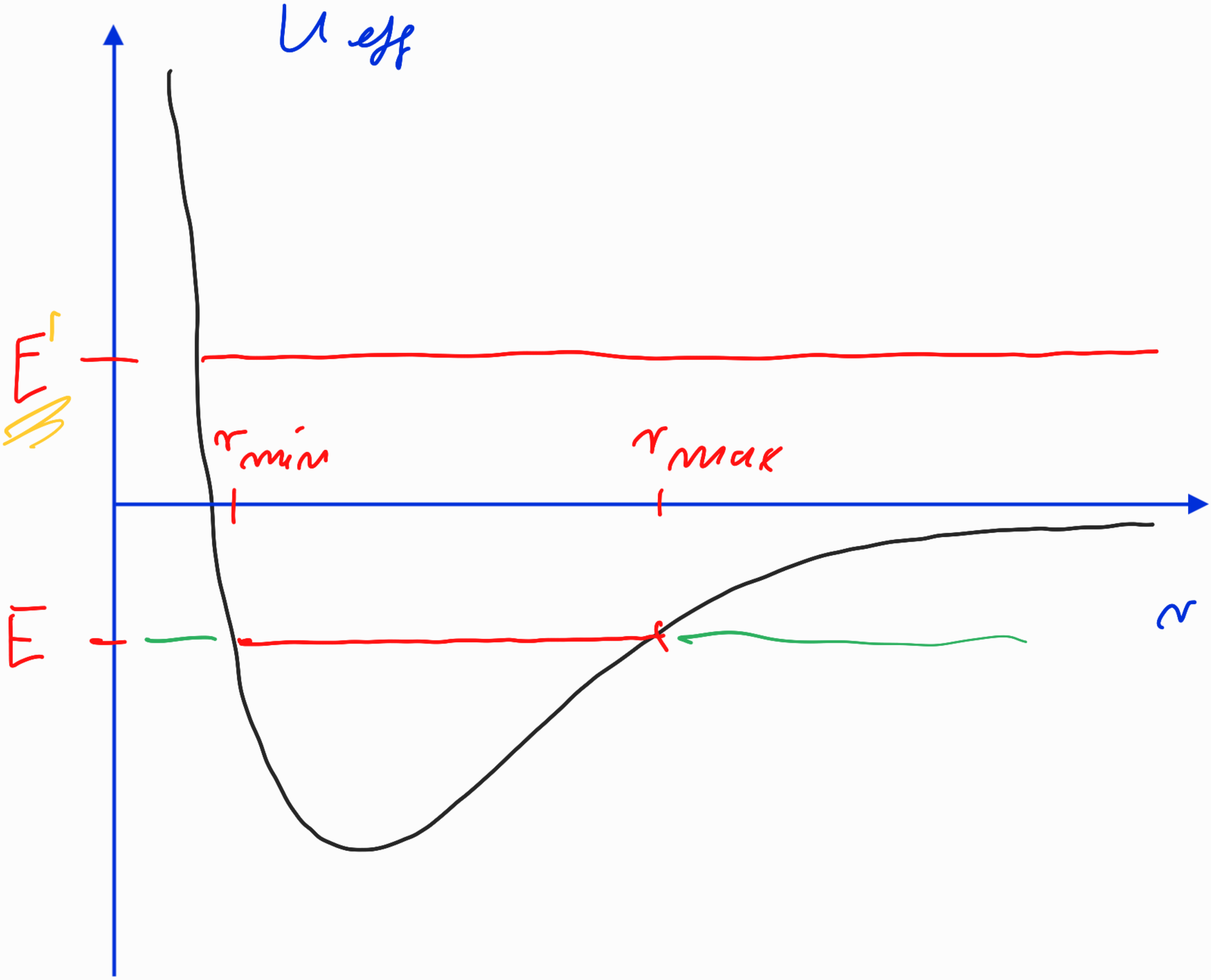
$$U(r) = - \frac{\gamma}{r}$$

$$\rightsquigarrow \quad E = \frac{m}{2}\,\dot{r}(t) + U_{eff}(r(t))$$

$$\boxed{U_{eff}(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{\ell^2}{2 m r^2}}$$

$$(\vec{L} \neq 0)$$

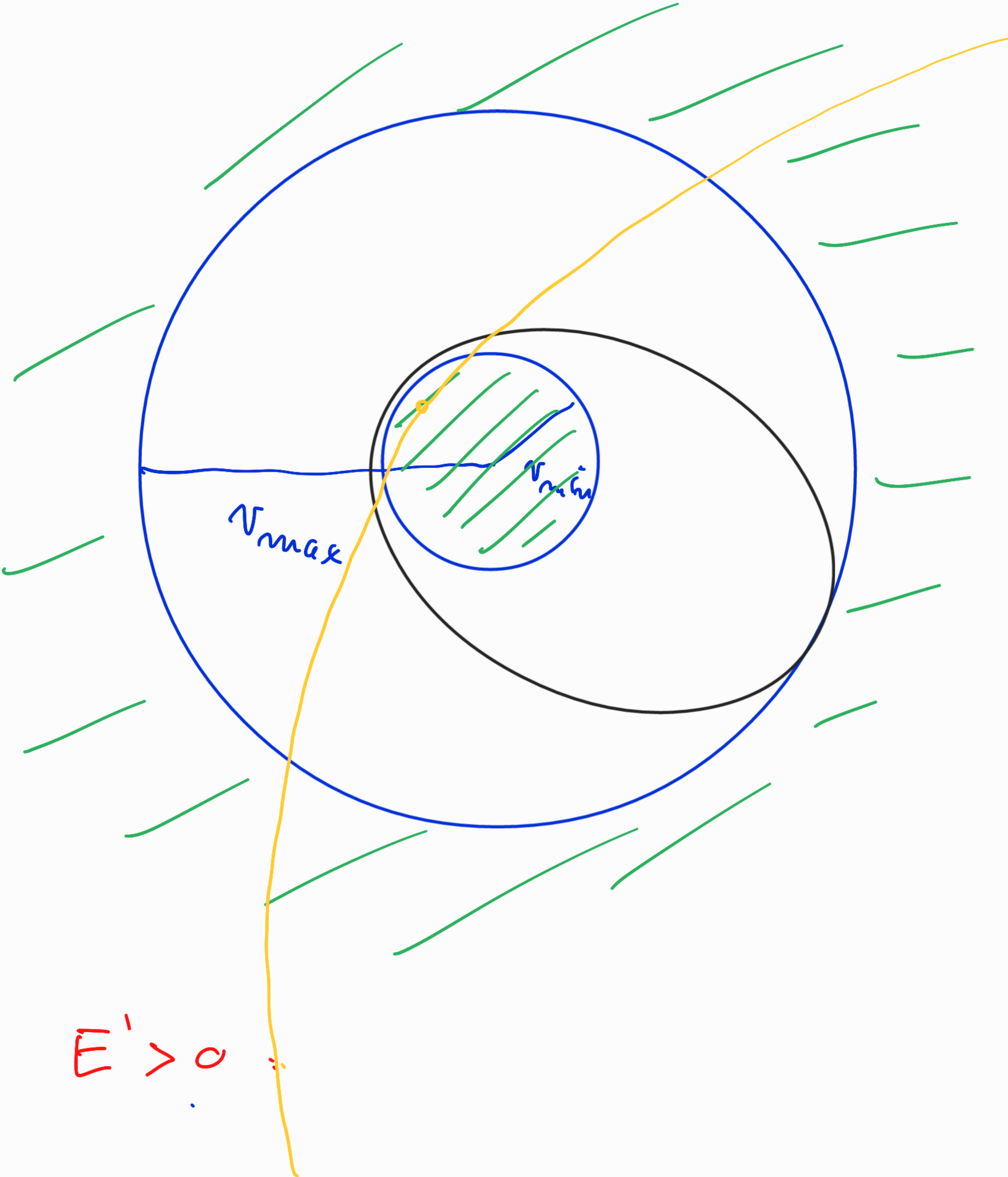




$\underline{E < 0}$ ($\vec{L} \neq 0$) :

Oszillation von $r(t)$:

$$r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$$



$E' > 0$: