<u>Letzte Woche</u>: Vektoren, Vektorraum,

<u>Basis</u> eines VRs = <u>linear unabhäng.</u> und <u>vollständiges</u> Vektorsystem

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$$

$\leadsto$ <u>Komponentendarstellung</u>:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \cdots + a_n \vec{e}_n$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \vec{e}_\ell = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

1--qq

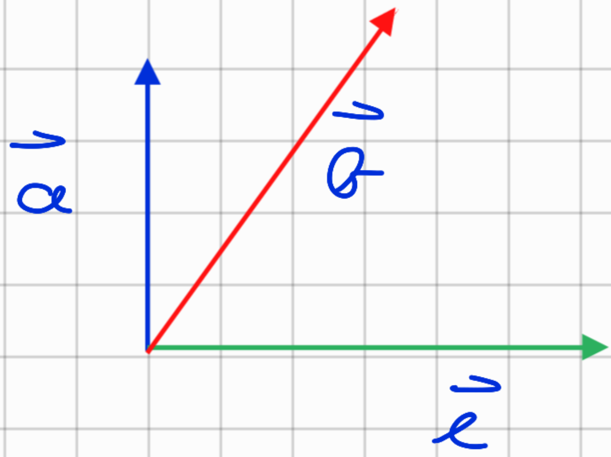
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_B,$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}_B , \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}_B$$

Dimension eines VRs = Anzahl der Basisvektoren

Heute: Vektoren mit Geometrie!

z.B. Translationen:

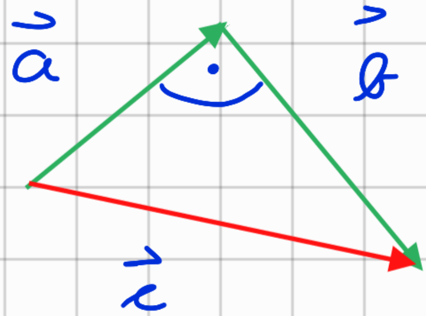


- $\vec{a} \perp \vec{e}$
- $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{b}) = \pi/3$
- $|\vec{a}| < |\vec{e}|$

$\longrightarrow$

• Gesetze der <u>euklidischen Geometrie</u>

z.B. Satz des Pythagoras:



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

"euklidische Geometrie" für allg. Vektoren mittels

<u>Skalarprodukt</u>

→ <u>geometrische Begriffe</u>

(Länge, Orthogonalität, Winkel, ...)

→ <u>euklidische Geometrie</u>

Def: <u>Skalarprodukt</u> für VRV

ist Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit Eigenschaften

(SP1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

(Symmetrie)

(SP2) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq 0$

$\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$

(SP3) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

$\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

VR mit S.P. = <u>euklidischer</u> VR

(Notation:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$$
)

$\Rightarrow$ geometr. Begriffe:

<u>Norm (Länge, Betrag)</u>

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}}$$

<u>Orthogonalität</u>

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0}$$

„$\vec{a}$ orthogonal $\vec{b}$"

Beispiele und Anwendungen:

1) $\vec{a} \perp \vec{c}, \ \vec{b} \perp \vec{c} \ \Rightarrow \ \vec{a}+\vec{b} \perp \vec{c}$

$\ulcorner$

$\vec{a} \perp \vec{c} \ \Rightarrow \ \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$

$\vec{b} \perp \vec{c} \ \Rightarrow \ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$

$$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{c} \rangle = \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \ \vec{a}+\vec{b} \perp \vec{c}$ ✓

$\lrcorner$

2) $|\lambda \vec{a}| = |\vec{a}|\,|\lambda|$

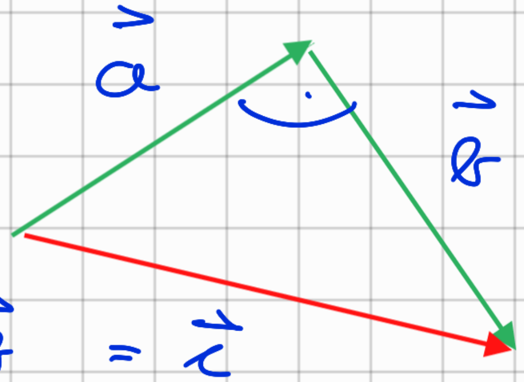
$\ulcorner$

$$|\lambda \vec{a}| = (\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle)^{1/2}$$

$$= (\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle)^{1/2} = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

✓ $\lrcorner$

3) Satz des Pythagoras



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

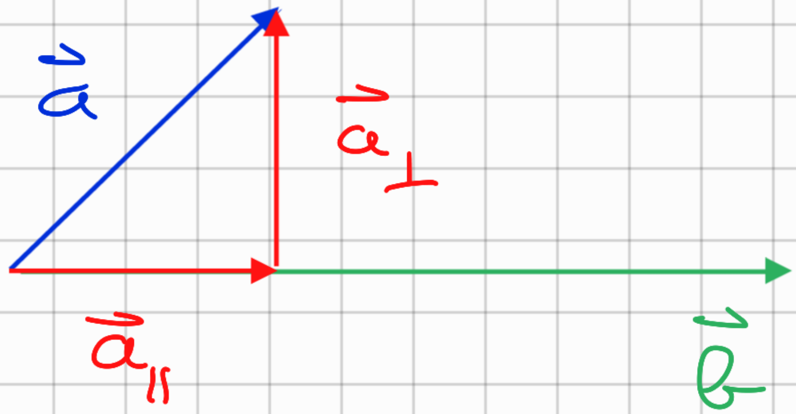
denn: $\vec{a} \perp \vec{b} \rightsquigarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

$$|\vec{c}|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{= |\vec{a}|^2} + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{= 0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{= 0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{= |\vec{b}|^2}$$

$$|\vec{b}|\, \hat{b} = \vec{b}$$

4) Parallel- und Orthogonalkomponente



$\vec{a}_\parallel$, $\vec{a}_\perp$ bestimmt durch:

(1) $\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp = \vec{a}$

(2) $\vec{a}_\parallel \parallel \vec{b}$ (d.h. $\vec{a}_\parallel = \lambda \vec{b}$)

(3) $\vec{a}_\perp \perp \vec{b}$ (d.h. $\langle \vec{a}_\perp, \vec{b} \rangle = 0$)

mittels Skalarprodukt:

$$\boxed{\vec{a}_\parallel = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel$$

mit Richtungsvektor $\boxed{\hat{b} := \vec{b} / |\vec{b}|}$

$$\vec{a}_{\parallel} = \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}, \quad (*)$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$$

✓

(1) $\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel}$ ✓

(2) $\vec{a}_{\parallel} \parallel \vec{b}$ ✓

(3) $\vec{a}_{\perp} \perp \hat{b}$?

2.2: $\langle \vec{a}_{\perp}, \hat{b} \rangle = 0$

$$\langle \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle =$$

$$= \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \vec{a}_{\parallel}, \hat{b} \rangle$$

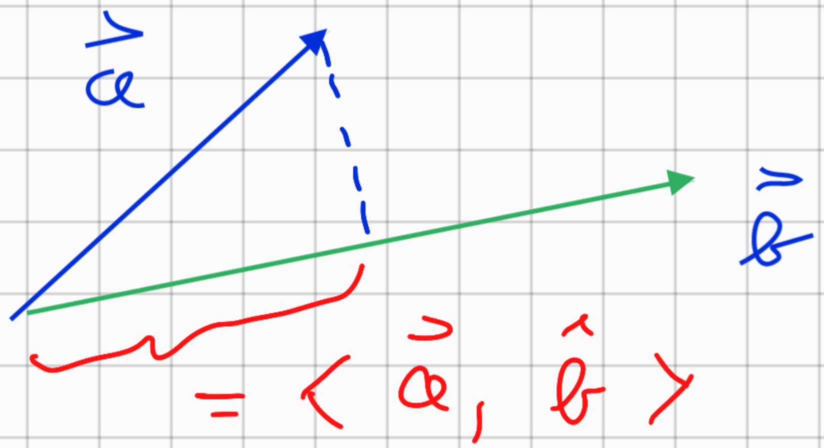
$$\overset{(*)}{=} \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}, \hat{b} \rangle$$

$$= \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle - \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \underbrace{\langle \hat{b}, \hat{b} \rangle}_{=1}$$

$$= 0$$ ✓

$\rightsquigarrow$ geometrische Bedeutung des S.P.s:

$\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle$ ist Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$



geometrisch

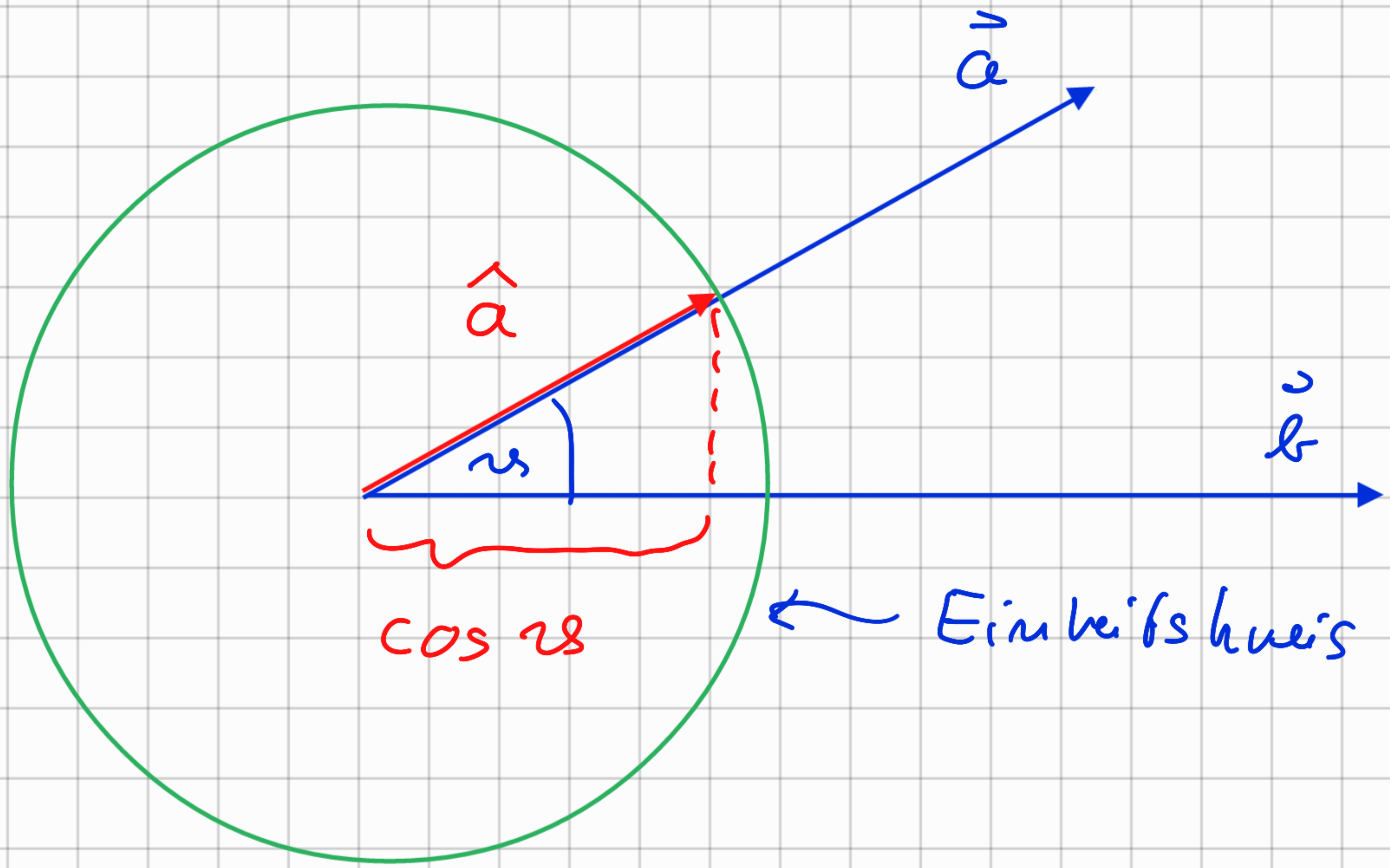
$\longrightarrow \quad |\langle \vec{a}, \hat{b} \rangle| \leq |\vec{a}|$

$\cdot |\vec{b}|$

$\longrightarrow \quad \boxed{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

Cauchy-Schwarz-Ungleich.

Winkel zwischen Vektoren



$$\boxed{\cos\vartheta = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

Def. des Winkels $\vartheta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Def.: Orthonormalbasis (ONB)

Basis $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ eines eukl. VRs V ist ONB g.d.w. die Basisvektoren paarweise orthogonal und vom Norm 1 sind, d.h.

(1) $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$

(2) $|\vec{e}_i| = 1$

kürzer mit S.P.

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ONB

g.d.w. $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$

noch kürzer mittels

Kronecker - Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

$\rightarrow$ Basis $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$

ONB g.d.w.

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

für alle i, j

Berechnung des SP in Komponenten einer ONB

$B = (\vec{e}_1, .., \vec{e}_n)$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_B$$

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2}}$$

warum?

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$$

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{e}_j$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i , \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{e}_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \underbrace{\langle \vec{e}_i , \vec{e}_j \rangle}_{\substack{= \ B \ \underline{\underline{ONB}} \\ \delta_{ij}}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Beispiel:

$\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprod.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ist Skalarprodukt!

(erfüllt SP1 – SP3 !)

Standardbasis:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist ONB!