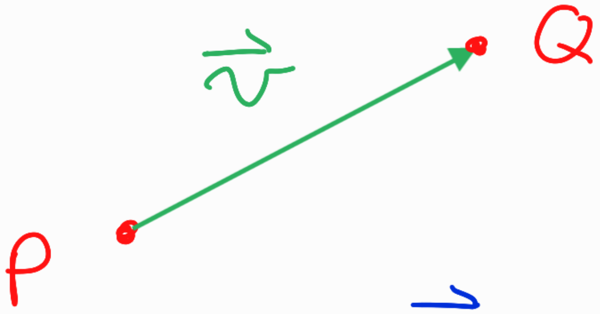
letzte Vorlsg.: **euklidischer Raum E_3**

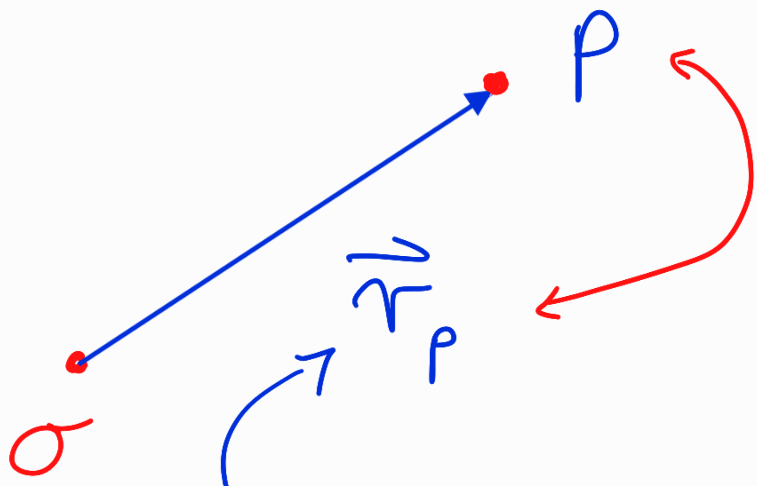


$P, Q \in E_3$

$\vec{v} \in V$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \iff Q = P + \vec{v}$$

Bezugspunkt $O \in E_3$



Ortsvektor von P

bzgl. O

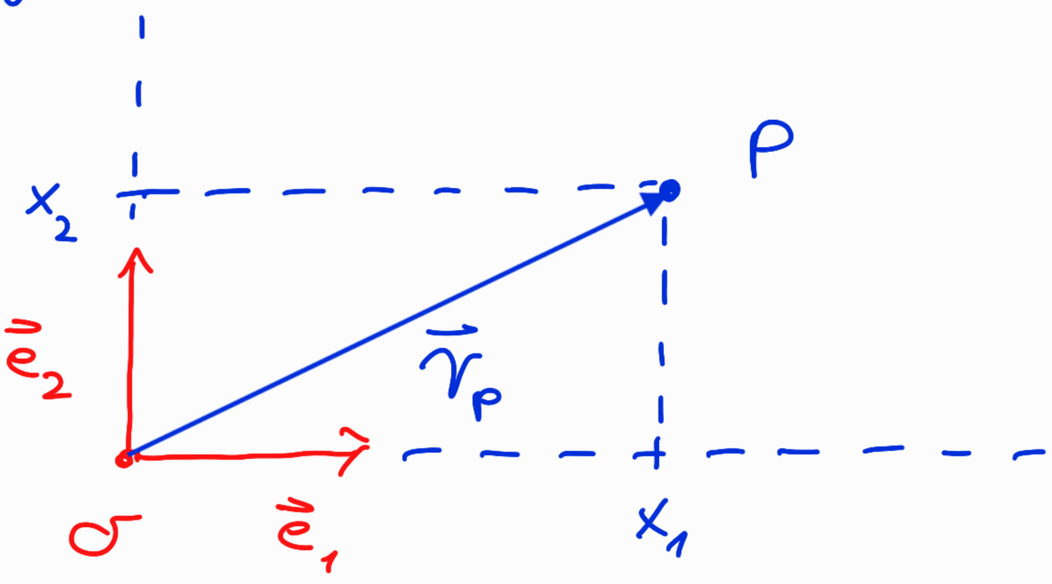
bijektive (eineindeutige) Abb.

(!)

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow E_3 \\ \vec{r} &\longmapsto P = O + \vec{r} \\ \overrightarrow{OP} = \vec{r} &\longleftarrow\!\!| \; P \end{aligned}$$

Kartesische Koordinaten:

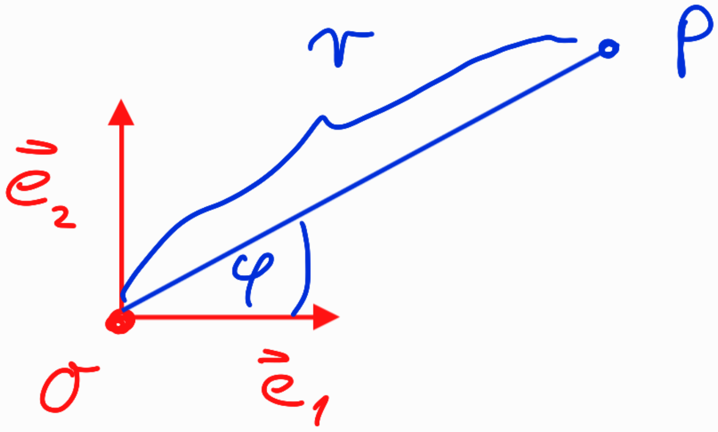
Bzgs. pkt. O, ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



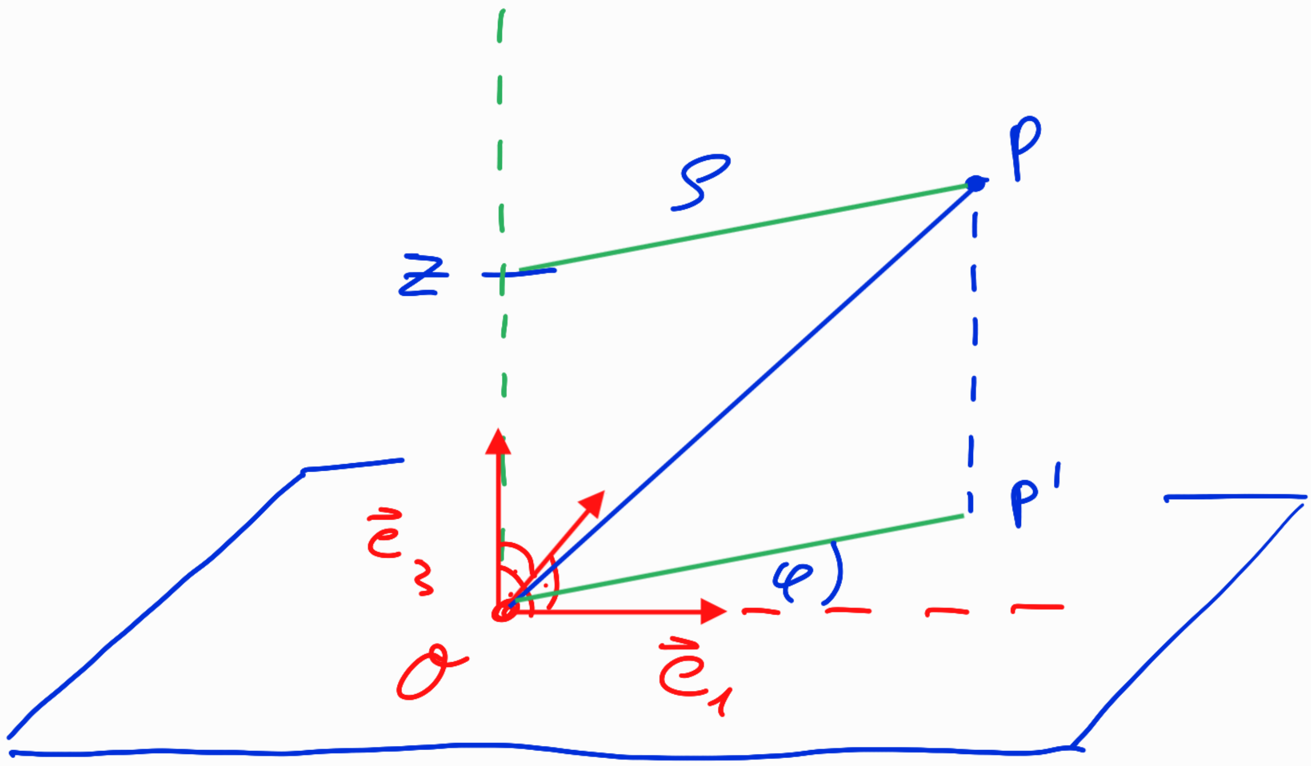
$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$$

Kartesische Koordinaten von P bzgl. O und B

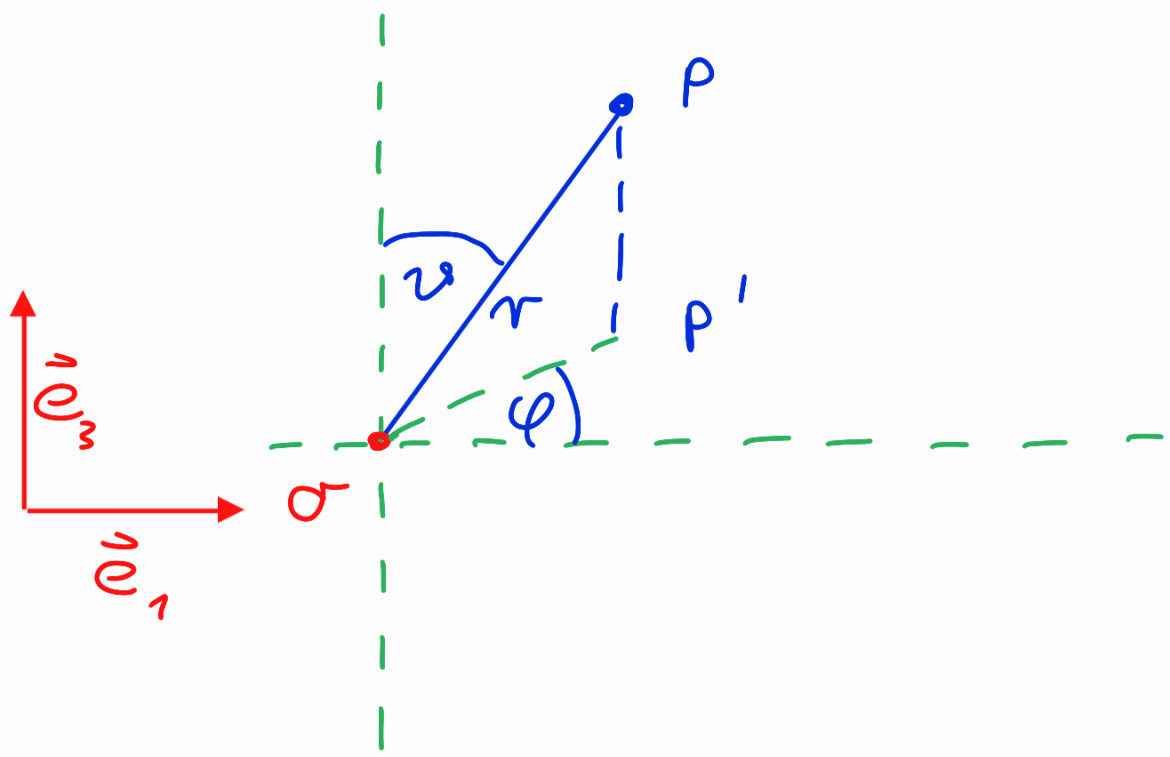
Polarkoordinaten: (r, φ)



Zylinderkoordinaten: (ρ, φ, z)

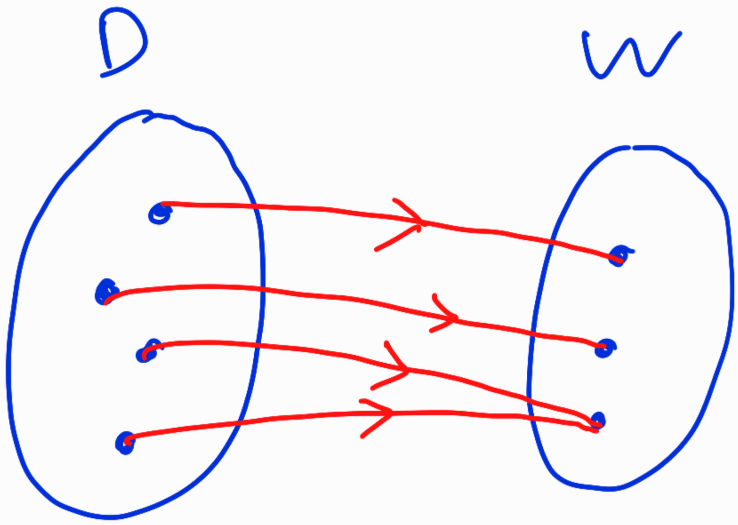


Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)



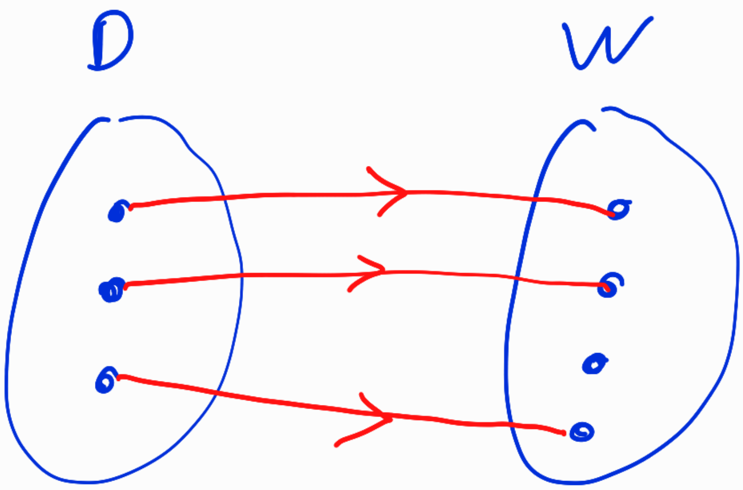
surjektive, injektive, bijektive Abb:

A :

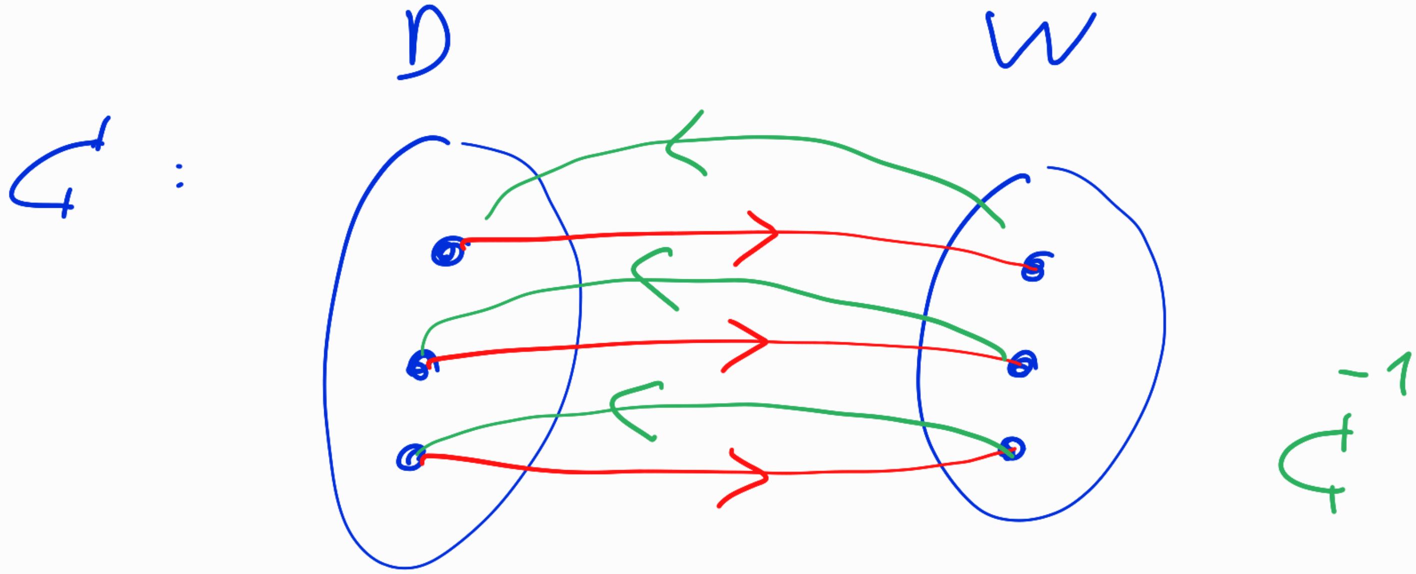


surjektive Abb: jedes $w \in W$ hat Urbild $x \in D$

B :



injektive Abb.: jedes $w \in W$ hat höchstens ein Urbild $x \in D$



<u>bijektive</u> Abb.:

zugleich <u>surjektiv</u> u. <u>injektiv</u>

d.h. jedes $w \in W$ besitzt <u>genau ein Urbild</u> $x \in D$

$$\boxed{\text{Abb. umkehrbar} \iff \text{Abb. bijektiv}}$$

Elemente der Analysis

reelle Funktionen = Abbildungen

$$f : D \longrightarrow W$$
$$x \longmapsto f(x) = [\text{Zuordnungs-vorschrift}]$$

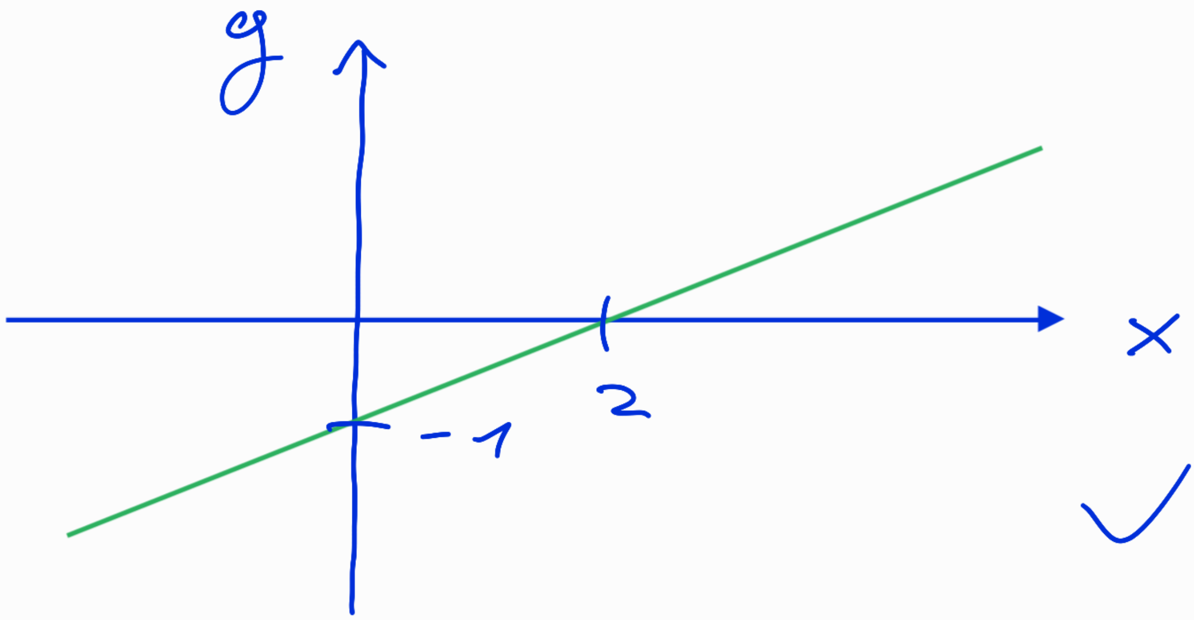
$D \subset \mathbb{R}$: Definitionsbereich

$W \subset \mathbb{R}$: Wertebereich

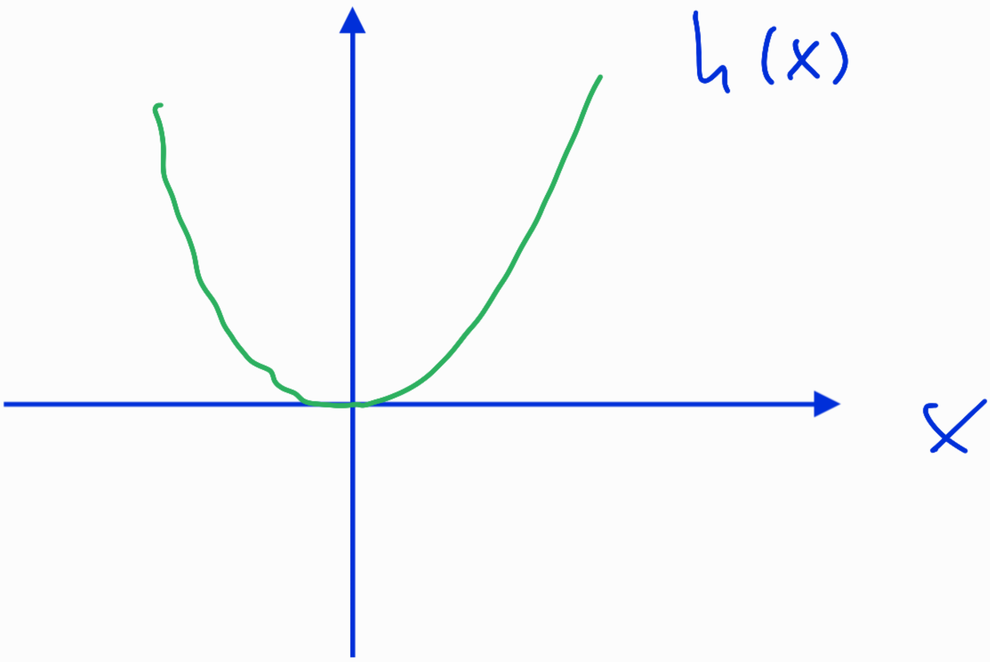
kürzer: $x \longmapsto f(x) = [\ldots]$

$$f(x) = [\ldots]$$

<u>Beispiele</u>: $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x - 1$



$h : x \longmapsto x^2$



$id : x \longmapsto x$

Verknüpfungen von Fkten:

$$f, g : D \to \mathbb{R}$$

Summe = Addition

$$f + g : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda f(x)$$

d.h.: Menge der Fkten $D \to \mathbb{R}$ bilden einen VR!

Produkt:

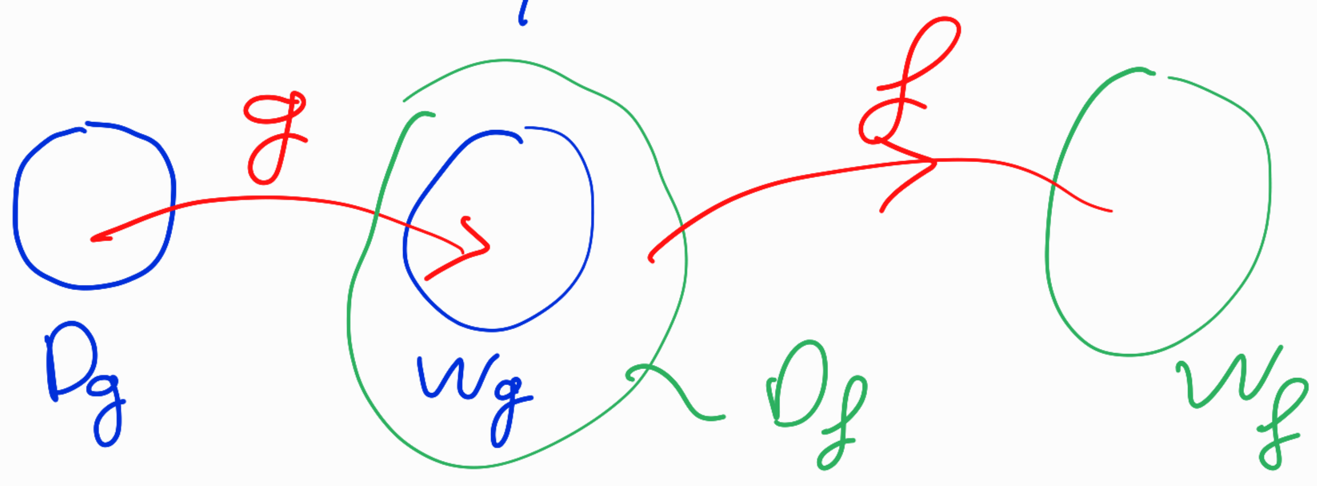
$$fg : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)g(x)$$

Quotient:

$$f/g : D \setminus \{\underset{\text{von } g}{\text{Nullstellen}}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)/g(x)$$

Verkettung von Abb'en:

(insbes. auch für Fkten)



$$f \circ g : D_g \to W_f$$
$$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Umkehrabbildung einer bijektiven Abb.

$$f : D \to W$$
$$x \mapsto f(x)$$

$$f^{-1} : W \to D$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x_y$$

mit x_y

best. durch

$$f(x_y) = y$$

Eigenschaften:

$$f^{-1} \circ f = id_D : D \to D$$
$$x \mapsto x$$

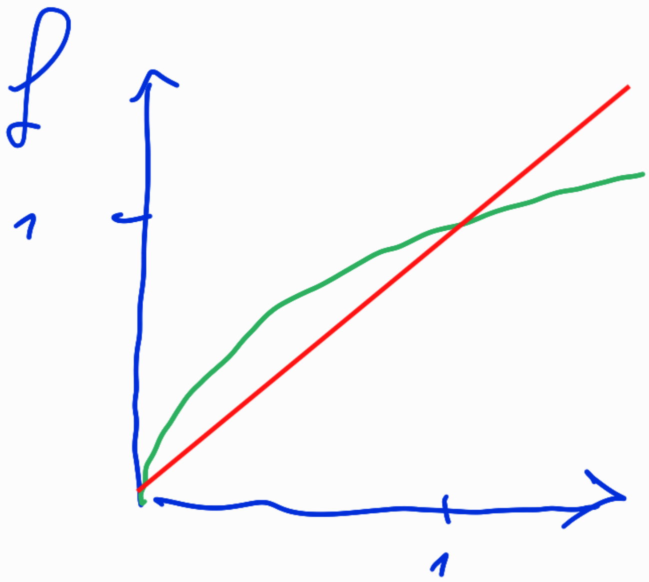
$$f \circ f^{-1} = id_W : W \to W$$
$$y \mapsto y$$

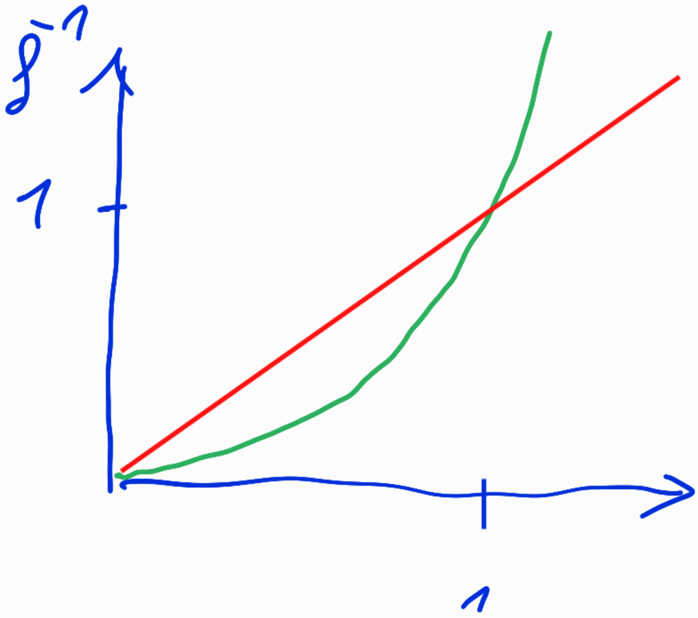
$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} .$$

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{aligned} f \ &: [0,\infty[\ \longrightarrow \ [0,\infty[\\ x \ &\longmapsto \ \sqrt{x} \end{aligned}$$

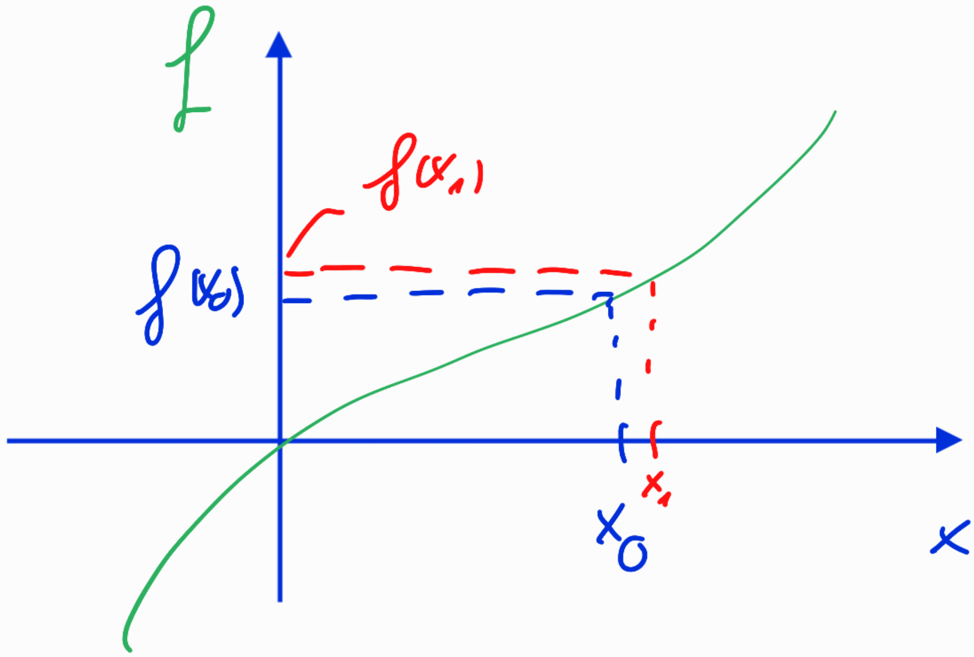
$$\begin{aligned} f^{-1} \ &: [0,\infty[\ \longrightarrow \ [0,\infty[\\ y \ &\longmapsto \ y^2 \end{aligned}$$





Stetigkeit, stetig Fkt.

geb:



f ist stetig im x_0 g.d.w.

„für $x \to x_0$ Funktionswert

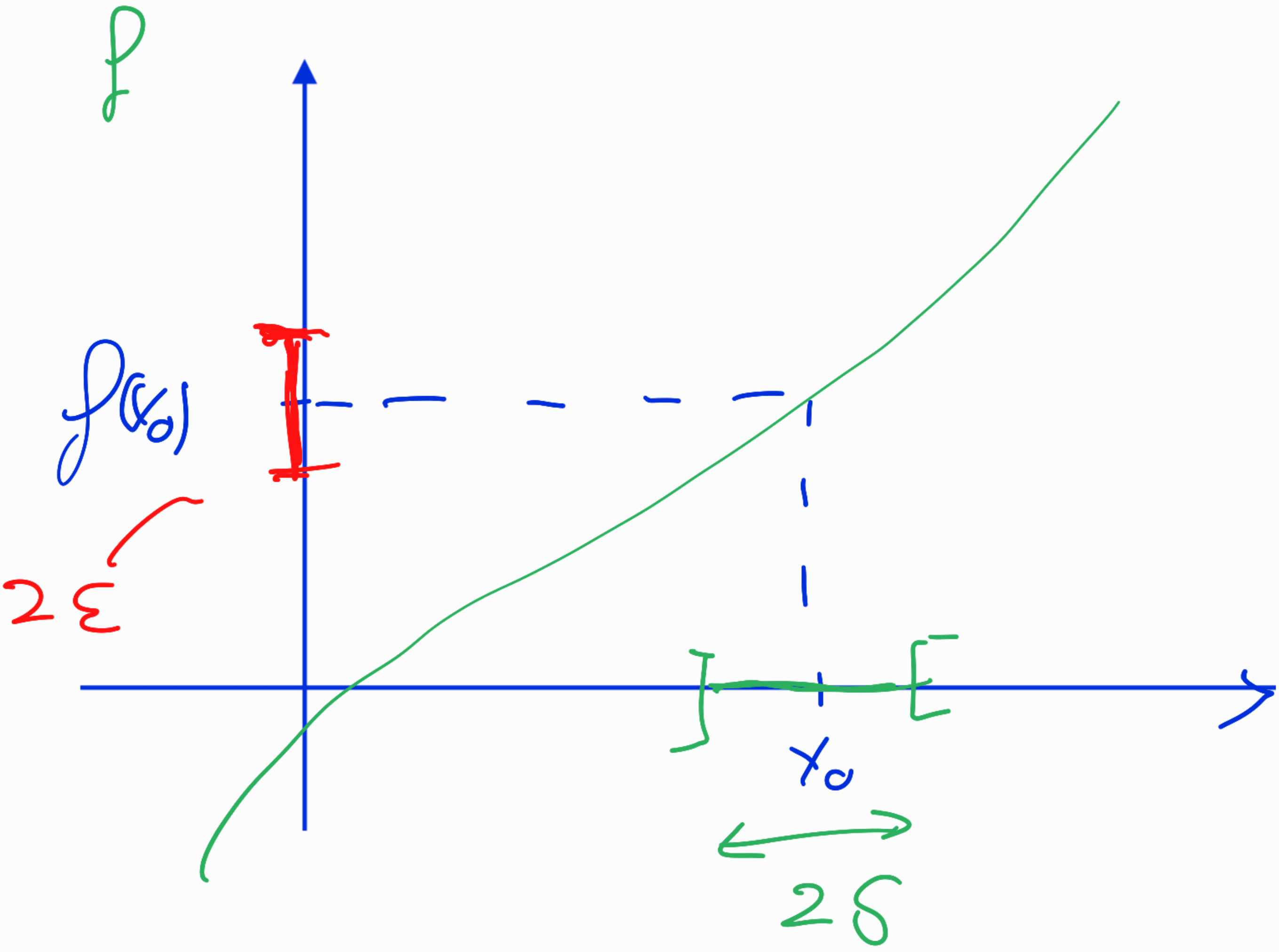
$f(x)$ gegen $f(x_0)$ strebt"

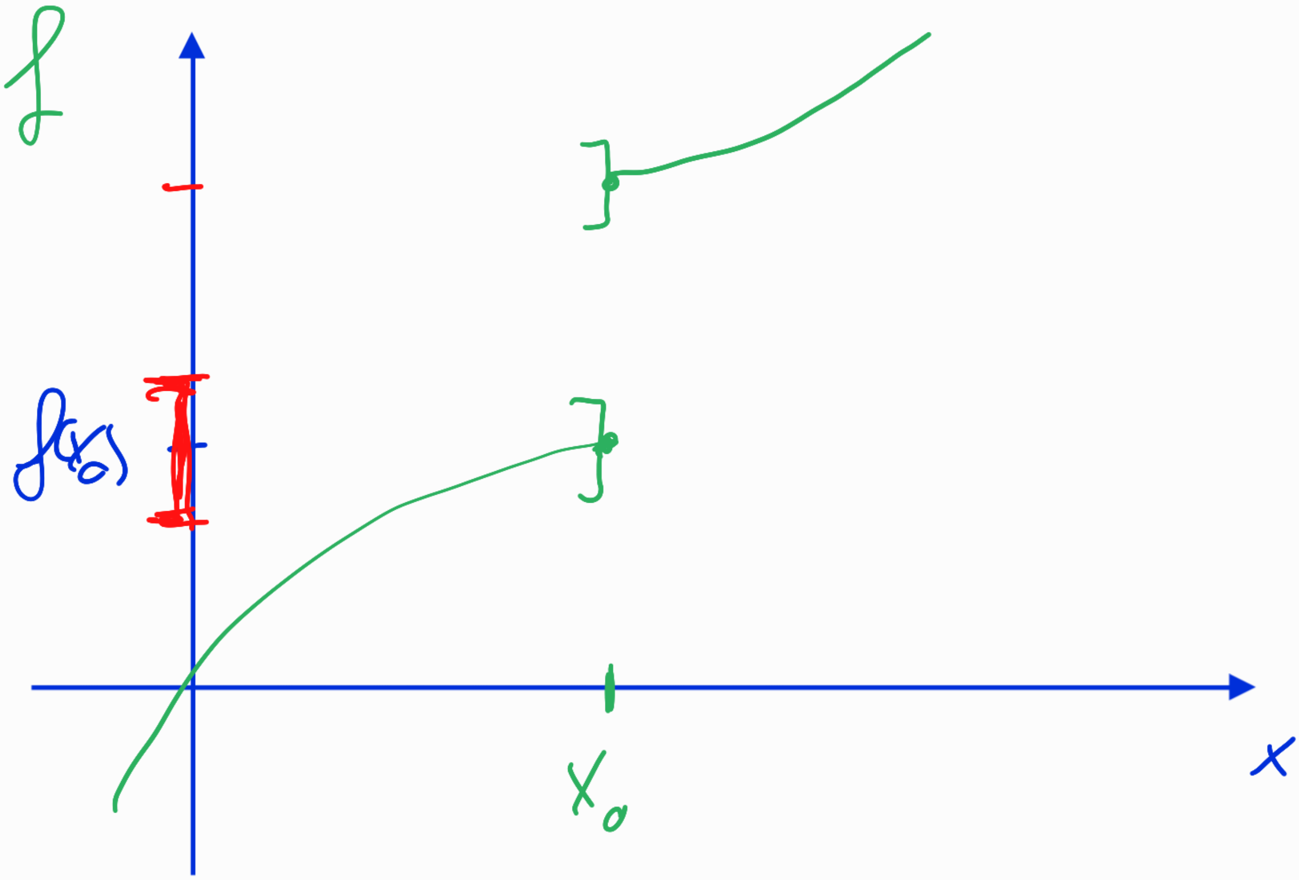
genauer:

f ist stetig in x_0 g.d.w.

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, s.d. für alle $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ist

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$





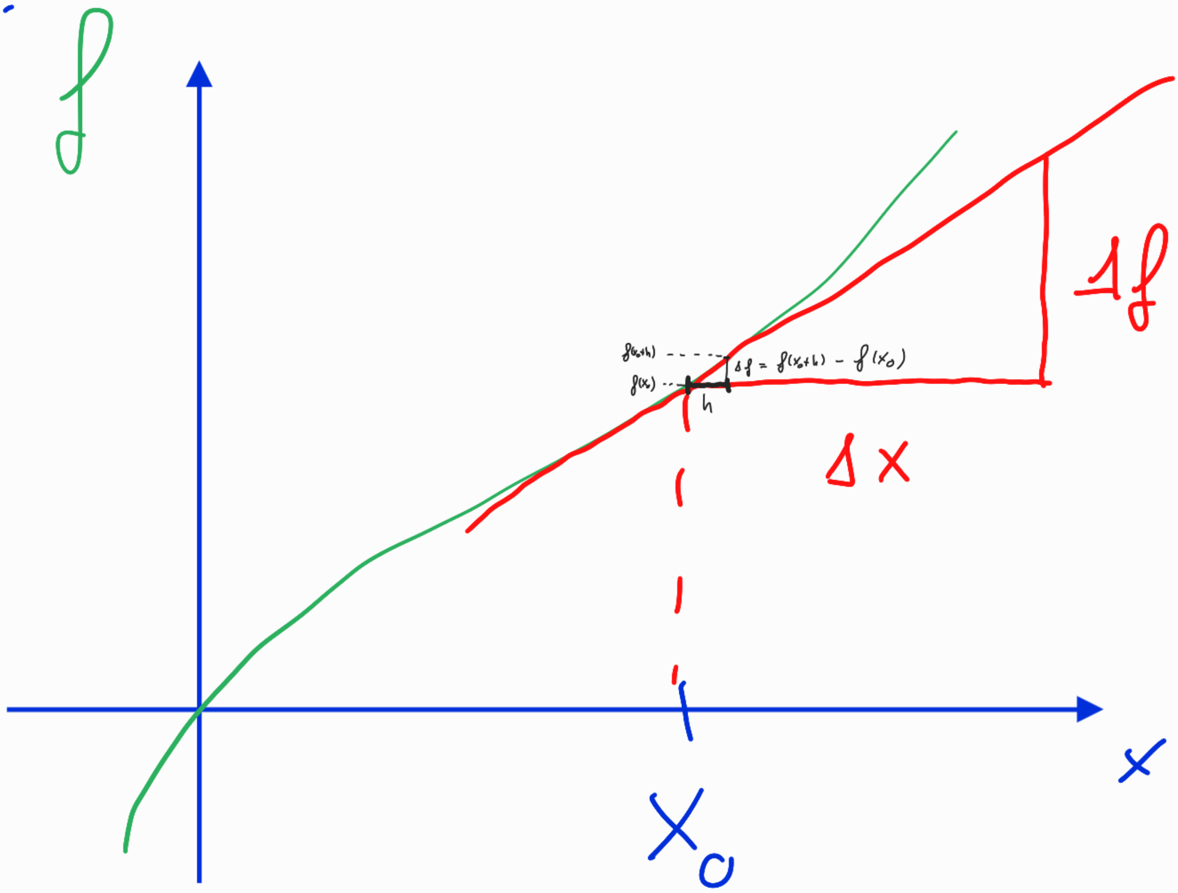
f nicht stetig in x_0

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig g.d.w.

für alle $x_0 \in D$: f stetig in x_0

Ableitung einer Fkt. f in x_0:

grob:



$$f'(x_0) = \text{Steigung der Tangente}$$
$$= \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

genau:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$