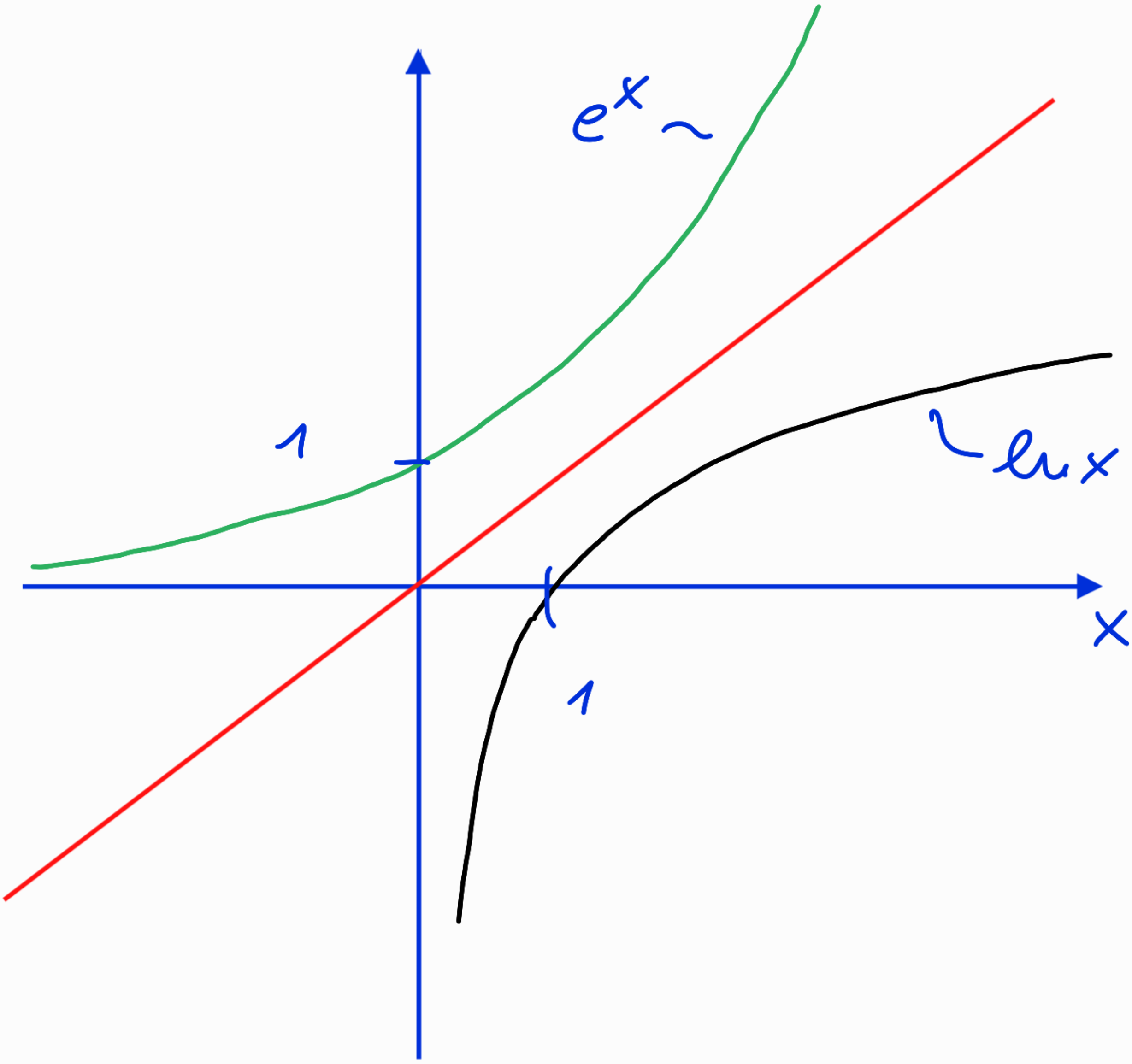
letzte Vrlsg.:

- Exponentialfkt. $\exp(x) = e^x$
- nat. Logarithmus $\ln(x) = \exp^{-1}(x)$

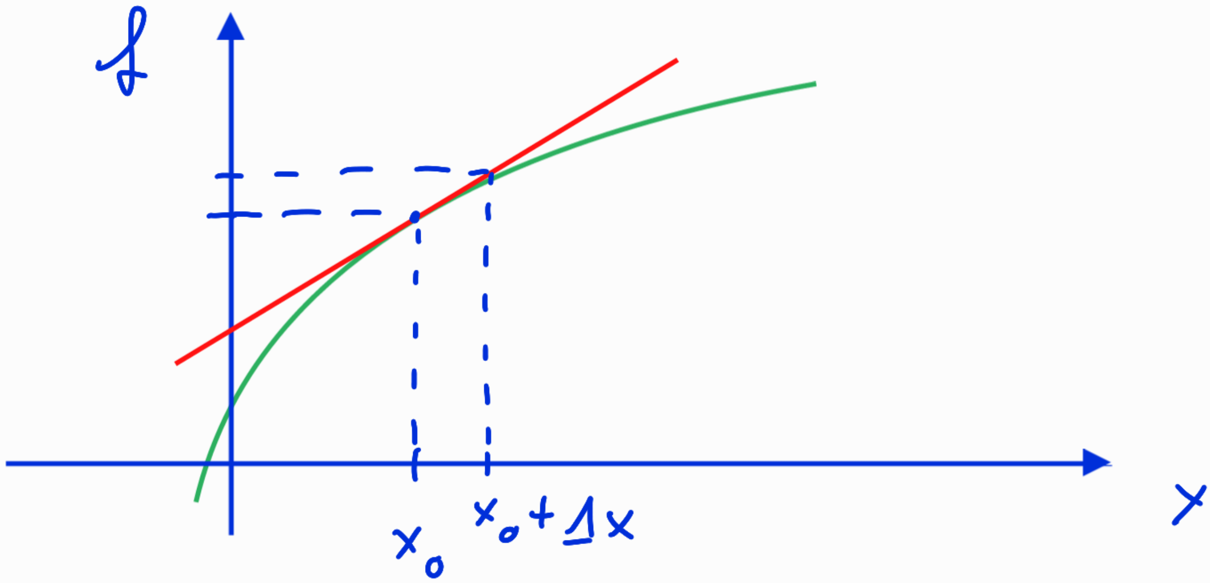


$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad , \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Eulersche Zahl $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

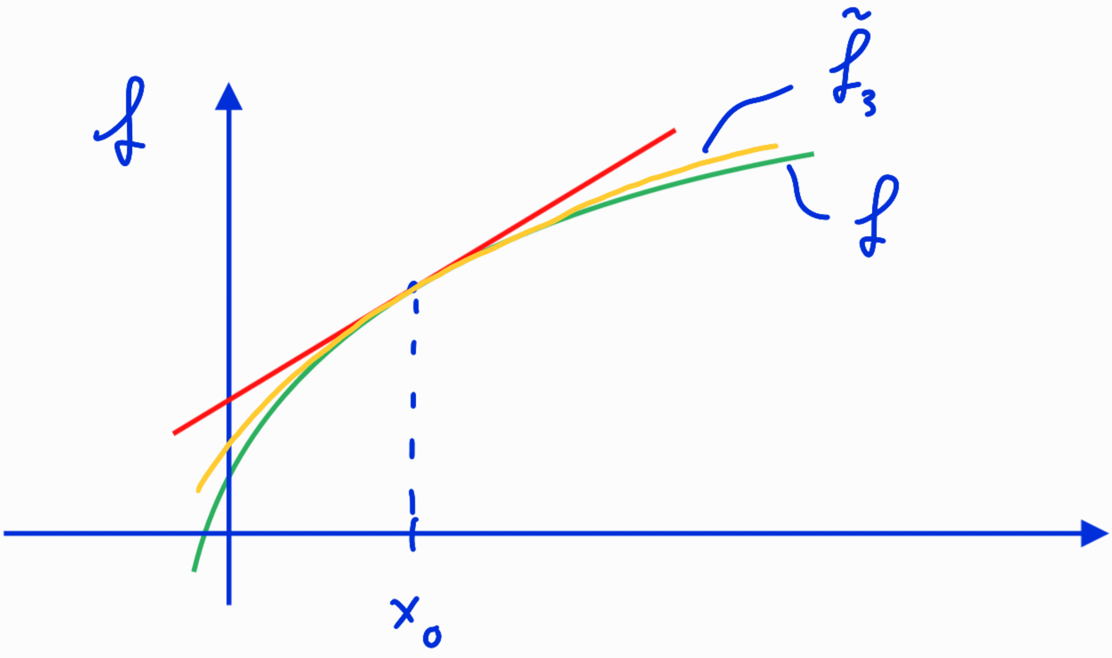
$= 2{,}718281828 5\ldots$

- <u>Lineare Näherung</u>:



$$\boxed{f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

<u>heute</u>: genauere Näherung von f
<u>mittels Taylor-Entwicklung</u>:



$$\tilde{f}_3(x_0+\Delta x) = a_0 + a_1\Delta x + a_2\Delta x^2 + a_3\Delta x^3$$

<u>Höhere Ableitungen</u>

Funktion	f	$= f^{(0)}$
↳ 1. Ableitung	f'	$=: f^{(1)}$
↳ 2. Ableitung	$f'' = (f')'$	$= f^{(2)}$
↳ 3. Ableitung	$f''' = (f'')'$	$= f^{(3)}$
4. " "	$f^{(4)} = (f^{(3)})'$	

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad (n > 1)$$

<u>Beispiel</u>: $f(x) = x^4$

$$\rightarrow f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 4 \cdot 3\, x^2$$

$$f^{(3)}(x) = (4 \cdot 3\, x^2)' = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{(konstant!)}$$

$$\to \quad f^{(\ell)}(x) = 0 \qquad \text{für } \ell \geq 5$$

<u>allg</u>: <u>Höhere Ableitungen von x^m</u>:

$m \in \mathbb{N}$

$$(x^m)^{(\ell)} = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-\ell+1) & : \ell < m \\ m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 & : \ell = m \\ 0 & : \ell > m \end{cases}$$

<u>Fakultät</u>

$$\boxed{\begin{aligned} n! &:= n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad : n \geq 1 \\ 0! &:= 1 \end{aligned}}$$

„n Fakultät"

$$\boxed{(x^m)^{(\ell)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-\ell)!}\, x^{m-\ell} & : \ell \leq m \\ 0 & : \ell > m \end{cases}}$$

Taylor-Entwicklung

Idee: Näherung einer Fkt f im $x_0 = 0$ (allg: $x = x_0$) durch ganz-rationale Fkt. n-ten Grades:

$$\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
$$= \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

wähle a_m so, dass

$$\boxed{\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) \overset{!}{=} f^{(\ell)}(0)} \quad (*)$$

für $\ell \leq n$

$$a_m = ?$$

$$\tilde{f}_n^{(\ell)}(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \left(x^m\right)^{(\ell)}$$

$$= \sum_{m=\ell}^{n} a_m \left(x^m\right)^{(\ell)}$$

$$= a_\ell \, \ell! + \underbrace{a_{\ell+1} (\ell+1)! \, x + \dots \; x^2 + \dots}_{= 0 \text{ für } x = 0!}$$

$$\rightarrow \underline{a_\ell} \, \ell! = \tilde{f}_n^{(\ell)}(0) \overset{(*)}{=} \underline{f^{(\ell)}(0)}$$

$$\leadsto \boxed{a_\ell = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)}$$

Taylor-Entwicklung (-Reihe) n-ter Ordnung von Fkt. f im $x_0 = 0$:

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)\, x^\ell}$$

allg.: um x_0 $(\neq 0)$:

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(x_0)(x-x_0)^\ell}$$

Beispiele: $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Taylor-Entwicklung um $x=0$:

$f(0) = 1$; $f'(x) = + \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$f^{(2)}(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = +2\,\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 3\cdot 2\cdot 1\,\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,\frac{1}{(1-x)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(\ell)}(x) = \ell!\,\frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$$

$$f^{(\ell)}(0) = \ell!$$

$$\rightarrow \tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} x^\ell$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

für $|x| < 1$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots}$$

Geometrische Reihe

2) Taylor-Entw. der Exponentialfkt:

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$

$$\rightarrow \quad (e^x)^{(\ell)} = e^x$$

wenn $x = 0 \quad \rightarrow \quad (\exp)^{(\ell)}(0) = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$$\rightarrow \quad \tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} x^\ell$$

konvergent für $n \rightarrow \infty$:

Taylor-Reihe der Exponentialfkt.
(Potenz-Reihe)

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$\rightarrow$ Eulersche Zahl : $= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$$e = e^1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2}}_{2{,}5} + \frac{1}{6}}_{2{,}667} + \frac{1}{24}}_{2{,}708} + \frac{1}{120}}_{2{,}716}$$

$$\underbrace{2{,}716 + \frac{1}{720}}$$

$$= 2{,}7181 .$$