Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 1

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 24.10.2023, 23:59 Uhr

0. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Was ist ein Vektor?

b) Was versteht man unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation?

c) Was ist eine Basis eines Vektorraums?

d) Was ist die Dimension eines Vektorraums?

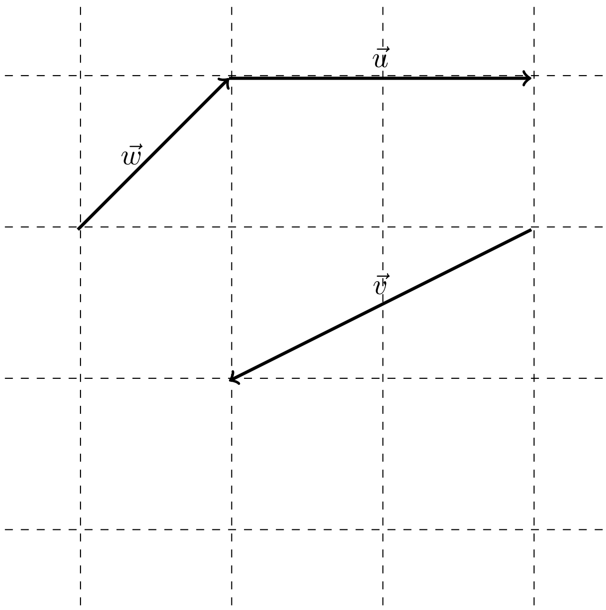
1. Vektoraddition

5 Punkte

Die in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Pfeile $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ symbolisieren Vektoren, die hier als Parallelverschiebungen zu interpretieren sind. Skizzieren Sie folgende Ausdrücke von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

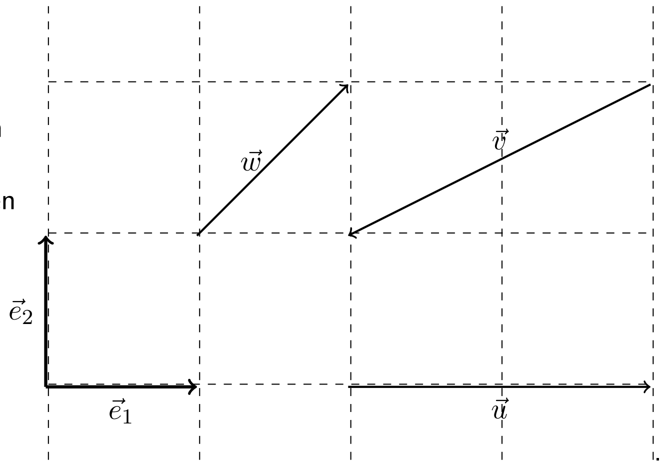
$\vec{u}+\vec{v}, \quad \vec{u}+\vec{w}, \quad \vec{w}-\vec{u},$

$\vec{r}=\vec{w} \;+\; 2(\vec{u}+\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}).$



2. Basisvektoren

3+2=5 Punkte



$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ seien die in der nebenstehenden Abbildung skizzierten Vektoren.

a) Schreiben Sie die ebenfalls dargestellten Vektoren $\vec{u}$,$\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.
Wie lauten demnach jeweils die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$,$\vec{v}$ und $\vec{w}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

b) Skizzieren Sie folgende Vektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

3. Komponenten

4+4 Punkte

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei eine Basis eines Vektorraums V. Eine weitere Basis von V sei $C = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ mit Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \,, \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \,, \\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Ferner seien Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben durch

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B .$$

a) Stellen Sie $\vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{u} - \vec{v}$ in Komponenten bzgl. Basis B dar.

b) Sellen Sie $\vec{w}$ in Komponenten bzgl. Basis C dar.

4. Funktionen als Vektoren

1+2+3=6 Punkte

P_3 sei der Vektorraum der ganzrationalen Funktionen maximal 3. Grades. Eine Basis des Vektorraums sei $B = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ mit Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3.$$

a) Was ist die Dimension von P_3?

b) Ist $(\tilde{f}_0, f_1, f_2, f_3)$ mit $\tilde{f}_0(x) = x(x-1)$ ebenfalls eine Basis von P_3 ?

c) Die Funktionen $g, h \in P_3$ seien gegeben durch

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B , \quad l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B ,$$

Skizzieren Sie die Graphen von g und $g + h - l$.