Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 9

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 09.01.2024, 23:59 Uhr

48. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix?

b) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$?

c) Wenn λ Eigenwert einer Matrix A ist, warum ist dann λ^2 Eigenwert der quadrierten Matrix $B = A^2$? Wenn A zudem invertierbar ist, wäre dann auch $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert der inversen Matrix A^{-1}?

d) Was hat die Determiante einer $n \times n$ - Matrix mit dem Volumen eines n-dimensionalen Spats zu tun? Warum ist dann $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$?

e) Wie ändert sich die Determinante einer Matrix wenn

- eine Matrixspalte mit einem Skalar λ multipliziert wird,
- das dreifache der ersten Matrixspalte zur zweiten Matrixspalte addiert wird,
- zwei Matrixspalten vertauscht werden ?

49. Determinanten *5×2=8 Punkte*

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

50. Eigenwerte und Eigenvektoren *4×2=8 Punkte*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

51. Strömung

3+3+1+2+3+3=15 Punkte

Wir betrachten eine stationäre Strömung einer Flüssigkeit in einer Ebene. Die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x})$ der Flüssigkeit am Ort $\vec{x} = (x_1, x_2)$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(\vec{x}) \;=\; \gamma \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei γ eine Konstante der Dimesion $1/Zeit$ ist. Wir interessieren uns nun für Bahnen der Flüssigkeitspartikel (Stromlinien) in dieser Strömung. Ein Partikel nimmt als Teil der Strömung zu jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit der Strömung am momentanen Partikelort $\vec{x}(t)$ an. Damit genügt die Partikelbahn $\vec{x}(t)$ der DGL (*Flussgleichung*)

$$\dot{\vec{x}}(t) \;=\; \vec{v}(\vec{x}(t))\,. \tag{2}$$

a) Visualisieren Sie die Flüssigkeitsströmung (für $\gamma = 0.5$), indem Sie an Punkten (p, q) mit allen Kombinationen von $p, q \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ den jeweiligen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(p, q)$ einzeichnen.

b) Zeichnen Sie qualitativ in der unter **a)** skizzierten Strömung die Bahnkurven für drei Flüssigkeitspartikel mit Anfangsorten bei $\vec{x}_a = (1, 1)$, $\vec{x}_b = (1, -1)$ und $\vec{x}_c = (1, 0)$ ein.

c) Die Flussgleichung (2) ist mit dem Geschwindigkeitsfeld (1) eine *lineare* DGL und kann mit einer geeignet gewählten 2×2-Matrix W in die Form

$$\dot{\vec{x}}(t) \;=\; W\vec{x}(t) \tag{3}$$

gebracht werden. Wie lautet die Matrix W?

d) Zur Lösung der linearen DGL (3) verwenden wir den Exponentialansatz

$$\vec{x}(t) \;=\; \vec{u}\, e^{\lambda t}\,.$$

Zeigen Sie, dass dieser Ansatz eine Lösung der DGL bildet, wenn λ Eigenwert der Matritx W mit Eigenvektor $\vec{u}$ ist.

e) Bestimmen Sie mittels **d)** eine allgemeine Lösung der DGL und anhand dieser spezielle Lösungen zu Anfangsorten $\vec{x}_{a,b,c}$ wie in Aufgabenteil **b)**. Stimmen diese Lösungen mit Ihren Erwartungen überein?

f) Bestimmen Sie nun die Bahn $\vec{x}_\varepsilon(t)$ zum Anfangsort $\vec{x}_0 = (1, -1+\varepsilon)$ mit betraglich kleinem, aber nicht verschwindenden Parameter ε. Diskutieren Sie qualitativ das Verhalten der Bahn $\vec{x}_\varepsilon(t)$ für kleine Zeiten $t \ll 1/\gamma$ und für große Zeiten $t \gg 1/\gamma$. Skizzieren Sie $\vec{x}_\varepsilon(t)$ für $\varepsilon < 0$ und $\varepsilon > 0$.