Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 11

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 16.01.2024, 23:59 Uhr

52. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was versteht man unter der Parametrisierung einer Kurve, eines Flächenstücks oder eines Volumengebiets?

b) Geben Sie Parametrisierungen für folgende Objekte im dreidimensionalen Raum an:

- Strecke zwischen zwei Punkten A und B mit Ortsvektoren $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$,
- Parallelogramm mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, ein Eckpunkt des Parallelogramms soll im Ursprung liegen,
- Spat mit Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, ein Eckpunkt des Spats soll im Ursprung liegen,
- Kreisfläche mit Radius R, Mittelpunkt im Ursprung, senkrecht zu $\vec{e}_3$.

53. Kurvenlänge *6 Punkte*

Eine Kurve im Raum sei parametrisiert durch

$$\begin{aligned} c \ : \ [0, 8\pi] \quad &\to \quad \mathbb{R}^3 \\ \varphi \quad &\mapsto \quad \vec{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ H\varphi/8\pi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei R und H positive Konstanten sind. Sizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie ihre Länge.

54. Kurvenintegral *8 Punkte*

Eine Kurve c durchlaufe in der xy-Ebene $3/4$ eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$. Die Kurve beginne bei $(2R, 0, 0)$ und ende bei $(R, -R, 0)$. Skizzieren Sie c und bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_c \vec{A} \mathrm{d}\vec{l}$ für das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$.

55. Flächeninhalt *8 Punkte*

Ein Flächenstück im Raum sei parametrisiert durch

$$\begin{aligned} S \ : \ [0, R] \times [0, 2\pi] \quad &\to \quad \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \varphi) \quad &\mapsto \quad \vec{S}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ H\rho/R \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei R und H positive Konstanten sind. Sizzieren Sie das Flächenstück und berechnen Sie den Flächeninhalt.

56. Flächenintegral

6 Punkte

Das Flächenstück S sei das Rechteck mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,1,0)$, $(0,1,0)$ und ein Vektorfeld $\vec{A}$ sei gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(x+y)^2 \\ \sin(x+y)^3 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral $\int\limits_S \vec{A}d\vec{f}$.