Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 12

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 23.01.2024, 23:59 Uhr

52. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie ist die Divergenz eines Vektorfeldes definiert? Welche anschauliche Bedeutung hat sie? Wie kann sie berechnet werden?

b) Was ist $\mathrm{div}\vec{r}$ und $\mathrm{div}\frac{\hat{r}}{r^2}$? $(r \neq 0)$

c) Was besagt der Satz von Gauß?

53. Volumeninhalt *8 Punkte*

Ein Volumengebiet G im Raum sei parametrisiert durch

$$\begin{aligned} G \ : \ [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,1] \quad &\to \quad \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\varphi,u) \quad &\mapsto \quad \vec{G}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} u\rho\cos\varphi \\ u\rho\sin\varphi \\ H\rho/R \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei R und H positive Konstanten sind. Sizzieren Sie das Volumengebiet und berechnen Sie den Volumeninhalt.

54. Integrale über Zylinder und Kugel *2+2+2+2=8 Punkte*

Volumenintegrationen können bei vorliegenden Symmetrien vereinfacht werden. Wir betrachten dazu in **a)** die Integration einer zylindersymmetrischen Funktion $f(\rho)$ (keine Abhängigkeit von φ und z) über einen Zylinder. In **b)** vereinfachen wir die Intergration einer kugelsymmetrischen Funktion $g(r)$ über eine Kugel. In **c)** und **d)** werden diese Ergebnisse beispielhaft angewandt.

a) Eine zylindersymmetrische Funktion f sei in Zylinderkoordinaten gegeben durch $(\rho,\varphi,z)\mapsto f(\rho)$. Z sei ein Zylinder mit Mittelpunkt in o und Zylinderachse parallel zu $\vec{e}_3$. R und H seien Radius und Höhe des Zylinders. Zeigen Sie:

$$\int_Z f\mathrm{d}V \;=\; H\int_0^R f(\rho)\,2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho\,.$$

b) Eine kugelsymmetrische Funktion g sei in Kugelkoordinaten gegeben durch $(r,\vartheta,\varphi)\mapsto g(r)$. K sei eine Kugel mit Radius R und Mittelpunkt in o. Zeigen Sie:

$$\int_K g\mathrm{d}V \;=\; \int_0^R g(r)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

c) Das Massenträgheitsmoment I_3 eines homogenen Zylinders Z bzgl. der Zylinderachse (parallel $\vec{e}_3$) ist gegeben durch das Volumenintegral

$$I_3 = \int_Z m\rho^2 \mathsf{d}V$$

wobei m die homogene Massendichte des Zylinders ist. Berechnen Sie I_3 für einen Zylinder der Masse M, Radius R und Höhe H.

d) Im Wasserstoffatom (Grundzustand) bildet das Elektron eine negativ geladene Atomhülle um den positiv geladenen Atomkern. Die kugelsymmetrische Ladungsdichte der Hülle ist

$$\rho_e(r) = \frac{-e}{\pi a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a_0}$$

Hierbei ist e die Elementarladung und a_0 der Bohrsche Atomradius. Zeigen Sie, dass die Atomhülle insgesamt die Ladung $-e$ trägt.

Hinweis: $\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x} dx = 2$.

55. Divergenz *6 Punkte*

Bestimmen Sie die Divergenzen folgender Vektorfelder:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{r}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}, \qquad \vec{C}(\vec{r}) = \langle \vec{a}, \vec{r}\,\rangle\,\vec{b}\,.$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind konstante Vektoren.

56. Satz von Gauß *6 Punkte*

Wir betrachten eine Pyramide P der Höhe H mit einer quadratischen Grundfläche Q der Kantenlänge a. Die Grundfläche Q liege in der $\vec{e}_1\vec{e}_2$-Ebene, mit einem Eckpunkt in o und Kanten parallel zu $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. Ein Vektorfeld $\vec{A}$ ist gegeben durch $\vec{A}(\vec{r}) = c\vec{r}$ (c konstant). Berechnen Sie (ggf. mit Hilfe des Satz von Gauß):

$$\mathrm{div}\vec{A}, \qquad \int_P \mathrm{div}\vec{A}\,\mathsf{d}V, \qquad \int_{\partial P} \vec{A}\,d\vec{f}\,.$$