
Mathematische Methoden – Blatt 13

Wintersemester 2023/24

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 30.01.2024, 23:59 Uhr

57. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Wie ist die Rotation eines Vektorfelds definiert? Wie kann sie in kartesischen Koordinaten berechnet werden?
- b) Was besagt der Satz von Stokes?

58. Rotation

6 Punkte

Berechnen Sie die Rotation folgender Vektorfelder:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}, \quad \vec{C}(\vec{r}) = \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle \vec{b}.$$

\vec{a} und \vec{b} sind konstante Vektoren.

59. Rotation und Gradient

4+4 Punkte

- a) Berechnen Sie zuerst den Gradienten des Skalarfelds $f(\vec{r}) = x_1 x_2^2 x_3^3$. Bestimmen Sie dann die Rotation des Gradientenfelds $\text{grad} f$.
- b) Zeigen Sie, dass generell die Rotation eines Gradientenfelds verschwindet:

$$\text{rot grad} f = \vec{0}.$$

60. Elektrisches Feld einer homogen geladenen Platte

10 Punkte

Eine in der x_1x_2 -Ebene unendlich ausgedehnte Platte ist elektrisch geladen mit konstanter Flächenladungsdichte σ . Hieraus resultiert ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$, das aus Symmetriegründen folgendem Ansatz genügt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} +E(|x_3|)\vec{e}_3 & : x_3 > 0 \\ -E(|x_3|)\vec{e}_3 & : x_3 < 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie ausgehend vom Gaußschen Gesetz

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

und mit Hilfe des Satz von Gauß die Feldstärke $E(z)$.

61. Magnetfeld im Koaxialkabel

10 Punkte

Ein langes, gerades Koaxialkabel führt auf dem inneren Leiter (Radius R_i) den elektrischen Strom I_0 und auf dem äußeren Leiter (Radius R_a) einen gleichgroßen Strom in entgegengesetzter Richtung, $-I_0$ (vgl. Skizze). Unter der Annahme, dass die Stromdichte auf den jeweiligen Leitern konstant ist, bildet sich ein Magnetfeld folgender Form aus:

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} B^{(1)}(\rho)\vec{e}_\varphi & : \rho < R_i \\ B^{(2)}(\rho)\vec{e}_\varphi & : R_i < \rho < R_a \\ B^{(3)}(\rho)\vec{e}_\varphi & : R_a < \rho \end{cases}$$

Bestimmen Sie ausgehend vom Ampèreschen Gesetz

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

und mit Hilfe des Satz von Stokes die Feldstärken $B^{(n)}(\rho)$.

