Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 2

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 31.10.2023, 23:59 Uhr

5. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist ein Skalarprodukt? Wie lauten die definierenden Eigenschaften?

b) Wann sind zwei Vektoren orthogonal?

c) Wie bestimmt man die Norm eines Vektors? Wie bestimmt man den Winkel zwischen zwei Vektoren?

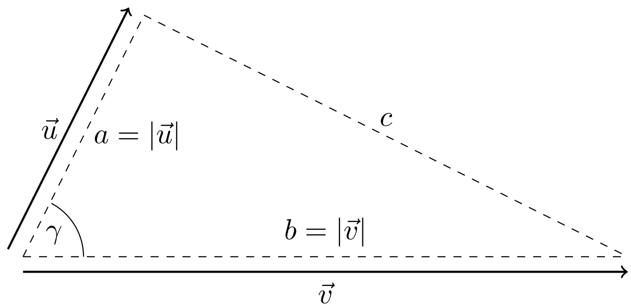
d) Was ist eine Orthonormalbasis (ONB)?

e) Wie ist das Vektorprodukt definiert?

6. Skalarprodukt *1+3+2+1=7 Punkte*

a) Finden Sie heraus, wie der Kosinussatz lautet und geben Sie diesen hier an.

b) Beweisen Sie den Kosinussatz mithilfe des Skalarprodukts. Als Inspiration diene die nebenstehende Skizze.



c) a und b seien die Kantenlängen eines Parallelogramms, e und f die Längen seiner Diagonalen. Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

d) Zeigen Sie schließlich mithilfe des Skalarprodukts, dass sich die Diagonalen eines gleichseitigen Parallelogramms ($a = b$) immer im rechten Winkel schneiden.

7. Vektoren und Basisdarstellung *1+4+5+3=13 Punkte*

Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ mit Komponenten u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 bezüglich einer Orthonormalbasis (ONB) $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

a) Stellen Sie $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ dar.

b) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

(i) $u_i \equiv \langle \vec{e}_i, \vec{u} \rangle$.

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \equiv \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$.

(iii) $|\vec{u}| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2}$.

Gegeben seien außerdem die Vektoren $\vec{f}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$, $\vec{f}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ und $\vec{f}_3 := \vec{e}_3$.

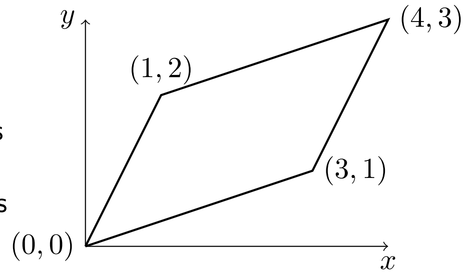
c) Zeigen Sie, dass es sich bei $B' := (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ ebenfalls um eine ONB handelt.

d) Berechnen Sie für die beiden nebenstehenden Vektoren die Darstellung in B'.
(Tipp: Benutzen Sie Aufgabenteil **b)**.)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

8. Flächen und Volumen mit dem Vektorprodukt *2+3+3+2=10 Punkte*

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramm mithilfe des Vektorproduktes.



b) Zeigen Sie, dass das Volumen eines durch drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Tetraeders gegeben ist durch $V = \frac{1}{6} |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|$.
(Tipp: Man kann das Volumen eines Tetraeders bestimmen durch $\frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe.)

c) $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei eine ONB. Betrachten Sie zwei Tetraeder, einen aufgespannt durch $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, und den anderen durch $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. Skizzieren Sie die beiden Tetraeder, und berechnen Sie deren Volumen.

d) Argumentieren Sie geometrisch, dass $|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle| = |\langle \vec{w} \times \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{u} \rangle|$.