Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 4

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 14.11.2023, 23:59 Uhr

15. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lauten die Ableitungen von $\cos^3 x$, $\cos(x^3)$ und $\ln(\cos^3 x)$?

b) Wie lautet die lineare Näherung von $\sin(x)$ um $x = 0$ bzw. $x = \pi$?

c) Was ist die Ableitung von $\exp(2\ln\sqrt{1+x^2})/(1+x^2)$?

16. Differenzenquotient *4 Punkte*

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ $(x \neq 0)$ elementar mit Hilfe des Differenzenquotienten.

17. Taylorentwicklung *4+2+2 Punkte*

a) Zeigen Sie mittels Taylor-Entwicklung, dass für $|x| \ll 1$ in guter Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 .$$

b) Ein Teilchen der Ruhemasse m bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigeit von Betrag v. Nach Einsteins spezieller Relativitätstheorie ist die *relativistische Energie* des Teilchens gegeben durch

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, mc^2,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Zeigen Sie mittels der Näherung aus **a)**, dass für $v \ll c$

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

c) Angenommen, ein Teilchen bewegt sich mit 10% der Lichtgeschwindigkeit. Wie groß ist dann die relative Abweichung der klassischen kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$ von $E - mc^2$?

18. Logarithmus *2+4+2 Punkte*

a) Wie lautet $\ln(1+x)$ in linearer Näherung um $x = 0$?

b) Zeigen Sie mittels Taylor-Entwicklung:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots .$$

c) Zeigen Sie mithilfe von $x = e^{\ln x}$ und Aufgabenteil **a)**, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha \qquad\qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

19. Höhere Ableitungen von sin und cos *6 Punkte*

Zeigen Sie für $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\sin x)^{(2l)} &= (-1)^l \sin x \\
(\sin x)^{(2l+1)} &= (-1)^l \cos x \\
(\cos x)^{(2l)} &= (-1)^l \cos x \\
(\cos x)^{(2l+1)} &= -(-1)^l \sin x
\end{aligned}$$

20. Potenzreihen für $\exp$, sin und cos *2+3+3 Punkte*

a) Begründen Sie, weshalb

$$\exp x \;=\; 1 \;+\; x \;+\; \frac{x^2}{2} \;+\; \frac{x^3}{2\cdot 3} \;+\; \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} \;+\ldots\;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,.$$

b) Zeigen Sie mittels Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \;-\cdots+\ldots = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}\,, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} \;-\cdots+\ldots = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Aufgabe **19**.

21. Partielle Ableitungen *6 Punkte*

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x_1,x_2) = \cos(x_1)\sin(x_2), \quad g(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{-\lambda x_1^2}\sin(kx_2), \quad h(\vec{x}) = \langle\vec{a},\vec{x}\rangle, \quad j(\vec{x}) = \mathrm{e}^{-\mu|\vec{x}|^2}\,.$$

$(\lambda, \mu, k \in \mathbb{R},\ \vec{x}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3)$