Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematatische Methoden – Blatt 5

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 21.11.2023, 23:59 Uhr

22. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist der Gradient einer Funktion?

b) Wie kann man mittels des Gradienten eine Funktion $f\vec{x})$ um einem Punkt $\vec{x}_0$ linear nähern?

c) Weshalb zeigt der Gradient einer Funktion immer in Richtung des stärksten Anstiegs?

d) Eine Funktion f in zwei Variablen ist gegeben durch $f(x_1, x_2) = (x_1+1)(x_2+2)$. In welcher Richtung steigt f im Ursprung $(0, 0)$ am stärksten an? In welcher Richtung ist f dort in linearer Näherung konstant?

23. Gradient I *2+3=5 Punkte*

Ein Funktion f in zwei Variablen x_1, x_2 ist gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \,.$$

a) Skizzieren Sie die Konturlinie $f(x_1, x_2) = 1$.

b) Bestimmen Sie den Gradienten von f, und zeichnen Sie den Vektor $\mathrm{grad} f(x_1, x_2)$ an den Punkten $(2, 0)$, $(0, 1)$ $(-2, 0)$ und $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in die Skizze aus Aufgabenteil **a)** ein. Überzeugen Sie sich, dass der Gradient an diesen Punkten senkrecht zur Konturlinie steht.

24. Gradient II *8 Punkte*

Berechnen Sie die Gradienten folgender auf den $\mathbb{R}^3$ definierten Funktionen ($\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$)

$$f(\vec{r}) = \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle \ , \quad g(\vec{r}) = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle^2} \,, \quad h(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} \,, \quad j(\vec{r}) = \frac{1}{2} k |\vec{r}|^2 \,.$$

Hierbei ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, k eine positive reelle Konstante und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.

25. Lokale Basis des Zylinderkoordinatensystems *6 Punkte*

Die Abbildung der Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) auf kartesische Koordinaten $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ist gegeben durch

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \,.$$

Hieraus folgen die Vektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ der lokalen Basis durch die Beziehungen

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\,, \qquad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\,, \qquad \vec{e}_z = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\,.$$

Berechnen Sie hiermit die Vektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ in Kompenenten bzgl. der Standardbasis.

26. Darts

1+2+3+3+3=12 Punkte

Ein Dartpfeil wird unter einem Winkel ϑ gegenüber der Horizontalen mit einer Geschwindigkeit von Betrag v auf eine in einer Entfernung $s = 2.37m$ befindlichen Dartscheibe geworfen. Der Mittelpunkt der Scheibe befindet sich auf gleicher Höhe wie der Abwurfsort des Pfeils. Im folgenden betrachten wir die Bahn des Pfeils bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems mit Ursprung o am Abwurfsort des Pfeils. Die horizontale in Richtung Dartscheibe sei $\vec{e}_1$, die vertikale Richtung sei $\vec{e}_2$. Zur Zeit $t = 0$ wird der Pfeil von o abgeworfen.

a) Begründen Sie, dass die Bahn des Pfeils (bei Vernachlässigung des Luftwiderstands) durch

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{v}\,t \;+\; \frac{\vec{g}}{2}\,t^2 \quad \text{mit} \quad \vec{v} = v\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

gegeben ist, wobei $g = 9.81m/s^2$ die Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche ist.

b) Zeigen Sie anhand von **a)**, dass der Pfeil nach einer Flugzeit $T = s/(v\cos\vartheta)$ am Ort

$$\vec{r}(T) \;=\; \begin{pmatrix}s\\ a\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = s\left(\tan\vartheta \;-\; \frac{gs}{2v^2\cos^2\vartheta}\right) \tag{1}$$

auf die Scheibe einschlägt.

c) Nun wollen wir zu einem gegebenen Abwurfwinkel $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ eine passende Abwurfgeschwindigkeit v_0 finden, damit der Pfeil genau die Mitte der Scheibe bei $(s, 0)$ trifft. Zeigen Sie:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gs}{\sin(2\vartheta_0)}}$$

(Hinweis: $2\sin x\cos x = \sin(2x)$.) Warum divergiert v_0 für $\vartheta_0 \to 0$ und $\vartheta_0 \to \pi/2$? Für welchen Abwurfwinkel ist v_0 minimal?

d) Der Dartspieler hat eine zittrige Hand und verfehlt bei einem Abwurfwinkel ϑ_0 die richtige Abwurfgeschwindigkeit v_0 um 1%. Wie groß ist die daraus resultierende vertikale Abweichung Δa des Einschlagpunkts von der Scheibenmitte? Benutzen und begründen Sie dazu die Beziehung

$$\Delta a \;=\; \frac{\partial a}{\partial v}(v_0, \vartheta_0) \;\times 0.01 v_0\,,$$

wobei $a = a(v, \vartheta)$ wie in Gl. (1). Wie groß ist diese Abweichung Δa für $\vartheta_0 = 10°$?

e) Ein anderer Dartspieler hat Probleme beim Zielen und verfehlt daher den richtigen Abwurfwinkel $\vartheta_0 = 10°$ um $0.25°$. Wie groß ist dann die resultierende Abweichung Δa? Benutzen und begründen Sie hier die Beziehung

$$\Delta a \;=\; \frac{\partial a}{\partial \vartheta}(v_0, \vartheta_0) \;\times \Delta\vartheta$$

($\Delta\vartheta$ = Winkelabweichung im Bogenmaß).