Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 6

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 28.11.2023, 23:59 Uhr

27. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Was ist eine Stammfunktion?

b) Kann eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei verschiedene Stammfunktionen haben?

c) Was besagt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung?

28. Zwei Teilchen

3+3=6 Punkte

Zwei Teilchen bewegen sich auf Bahnen $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ gemäß

$$\vec{r}_1(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{r}_2(t) = 2R\,\vec{e}_1 \;-\; R \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ 0 \\ \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix} ,$$

für Zeiten $t \geq 0$. Hierbei ist R ein konstanter Radius, ω_1, ω_2 sind konstante Winkelgeschwindigkeiten.

a) Skizzieren Sie die Bahnen für $R = 1cm$ und $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi/1s$ und $t \in [0, 1s]$.

b) Berechnen Sie für beide Bahnen die momentanen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Zeichnen Sie für $R = 1cm$ und $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi/1s$ die Richtungsvektoren der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu Zeiten $t_0 = 0$ und $t_1 = 0.75s$ an den jeweiligen Punkten $\vec{r}_{1/2}(t_{0/1})$ der in **a)** skizzierten Bahnen ein.

29. Bahn mit Geschwindigkeit von konstantem Betrag

2 Punkte

Ein Teilchen bewegt sich auf einer Bahn $\vec{r}(t)$ mit einer Geschwindigkeit von konstantem Betrag v_0. Zeigen Sie, dass zu allen Zeiten die Beschleunigung des Teilchen senkrecht zu seiner Geschwindigkeit steht.
Hinweis: $|\vec{v}(t)|^2$ nach der Zeit ableiten.

30. Bewegter Beobachter

4 Punkte

Die ortsabhängige Temperatur eines Mediums sei durch die Funktion $T(\vec{r})$ beschrieben. Ein Sonde bewegt sich auf einer Bahn $\vec{r}(t)$ durch das Medium und zeichnet auf ihrem Weg die zeitabhängige Temperatur $\tau(t) := T(\vec{r}(t))$ auf. Zeigen Sie, dass

$$\dot{\tau}(t) = \langle\, \mathrm{grad}\, T(\vec{r}(t)),\ \vec{v}(t)\,\rangle\ ,$$

wobei $\vec{v}(t)$ die momentane Geschwindigkeit des Teilchen zur Zeit t ist.

31. Stammfunktionen

1+4=5 Punkte

a) $f(x)$ sei eine positive Funktion. Zeigen Sie, dass dann $G(x) = \ln f(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ist.

b) Zeigen Sie:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2},$$

$$\int_a^b \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right) \quad (1 < a < b).$$

32. Halbkreis

2+3+1=6 Punkte

a) Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos^2(x)$ ist.

b) Lösen Sie das folgende Integral durch die Substitution $x = \sin(y)$, und mithilfe von Aufgabenteil **a)**.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx \, .$$

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $\sqrt{1 - x^2}$ von -1 bis 1 und erklären Sie damit Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil **b)**.

33. Drohnenflug

10 Punkte

In einer Drohne befindet sich ein Beschleunigungsmesser, der die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$ der Drohne ermittelt und instantan an eine Basisstation funkt. Diese empfängt das Signal und ermittelt daraus aktuelle Position und Geschwindigkeit der Drohne. Konkret empfängt die Basisstation für $0 \le t \le T = 20s$ das Signal $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ mit

$$a_1(t) = \begin{cases} b & : 0 \le t < \frac{T}{4} \\ 0 & : \frac{T}{4} \le t \le T \end{cases}, \quad a_2(t) = \begin{cases} 0 & : 0 \le t < \frac{3T}{4} \\ b & : \frac{3T}{4} \le t \le T \end{cases}, \quad a_3(t) = \begin{cases} b & : 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -b & : \frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2} \\ 0 & : \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases},$$

wobei $b = 0.1m/s^2$. Zur Zeit $t = 0$ ruht die Drohne an der Position $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Wo befindet sich die Drohne zur Zeit T und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sie sich dann?