
Mathematische Methoden – Blatt 7

Wintersemester 2023/24

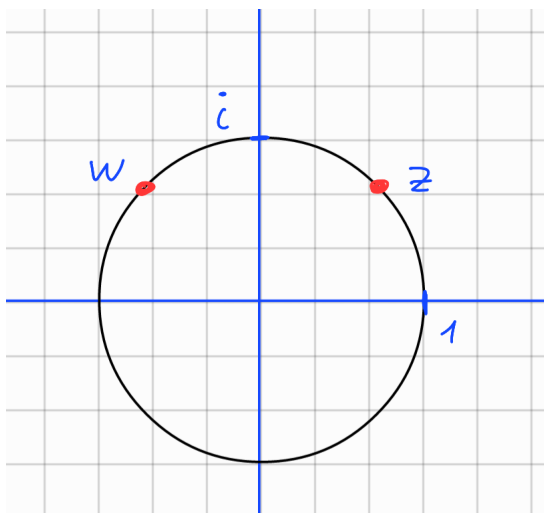
Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 5.12.2023, 23:59 Uhr

34. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Wie Verhalten sich Beträge und Argumente komplexer Zahlen unter Multiplikation?
- b) In der komplexen Ebene sind zwei komplexe Zahlen w und z eingetragen. Bestimmen Sie daraus geometrisch z^* , $w + z$, wz , z^*z , $\frac{1}{2}(z \pm z^*)$, $\frac{1}{w}$, $\frac{z}{w}$ und zeichnen Sie diese Zahlen ebenfalls in die komplexe Ebene ein.



35. Verallgemeinerte Produktregeln

6 Punkte

Für vektorwertige Funktion $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gelten beim Differenzieren verallgemeinerte Produktregeln:

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle' = \langle \vec{f}', \vec{g} \rangle + \langle \vec{f}, \vec{g}' \rangle, \quad (\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}'.$$

Zeigen Sie diese Beziehungen.

36. Rechnen mit komplexen Zahlen

10 Punkte

Bestimmen Sie jeweils Betrag, Inverses, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$1 + 2i, \quad \frac{1}{1+i}, \quad \frac{1}{i}, \quad (1+2i)(1-3i), \quad e^{i\pi/4}, \quad \sqrt{-9}.$$

37. Eulers Haus vom Nikolaus

6 Punkte

Zeichnen Sie folgende komplexen Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein. Verbinden Sie dabei aufeinanderfolgende Zahlen mit einer Geraden.

$$z_0 = \frac{1}{2}, \quad z_1 = z_0 + e^{i\pi/2}, \quad z_2 = z_1 + \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = z_2 + \frac{e^{i5\pi/4}}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = z_3 + \sqrt{2} e^{-i\pi/4}, \\ z_5 = z_4 + e^{i\pi}, \quad z_6 = z_5 + \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad z_7 = z_6 + e^{i\pi}, \quad z_8 = z_7 + e^{-i\pi/2}.$$

38. Euler-Identität I

2+3=5 Punkte

Im Folgenden seien $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Identität:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

b) Zeigen Sie mittels a):

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x.$$

39. Euler-Identität II

3+3=6 Punkte

a) Bestimmen Sie:

$$\int_0^\infty e^{(-a+ik)x} dx \quad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+).$$

b) Bestimmen Sie mittels a) und Euler-Identität:

$$\int_0^\infty \cos(kx)e^{-ax} dx, \quad \int_0^\infty \sin(kx)e^{-ax} dx \quad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+).$$