Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 8

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 12.12.2023, 23:59 Uhr

40. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist eine *Differenzialgleichung* (DGL)?

b) Was ist eine *Lösung* einer DGL?

c) Wie lautet die Lösung der DGL $y' = ay$ zum Anfangswert y_0 bei $x_0 = 0$?

41. Differenzialgleichungen *4×3=12 Punkte*

Bestimmen Sie zu folgenden Differenzialgleichungen jeweils die Lösung zum Anfangswert y_0 bei $x_0 = 0$:

$$y' = \frac{y}{(1+x)^2}\,, \qquad y' = x^3\,, \qquad y' = y^3\,, \qquad y' = \frac{\sqrt{y}}{1+x}\,.$$

42. Freier Fall mit Luftwiderstand *2+5+3=10 Punkte*

Ein Körper fällt unter dem Einfluss einer konstanten Schwerebeschleunigung $g \approx 10m/s^2$ und einer zum Betragsquadrat der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandskraft senkrecht zu Boden. Der Betrag v der Geschwindigkeit genügt damit der DGL

$$\dot{v} = g - \alpha v^2\,,$$

wobei der Parameter $\alpha > 0$ die Stärke der Luftwiderstandskraft beschreibt.

a) Welche Grenzgeschwindigkeit v_g erreicht der fallende Körper nach sehr langer Zeit?
Hinweis: Beim erreichen der Grenzgeschwindigkeit ist $\dot{v} \approx 0$.

b) Bestimmen Sie $v(t)$ für $v_0 = 0$ bei $t = 0$. Skizzieren Sie diese Lösung.
Hinweis: Trennung der Variablen, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x^2}$.

c) Fallschirmspringer erreichen typischerweise Grenzgeschwindigkeiten von etwa 200km/h (bevor der Fallschirm geöffnet wird). Schätzen Sie mittels Ihrer Ergebnisse aus **a)** und **b)** die Zeitdauer zwischen Absprung und dem Erreichen von etwa 3/4 der Grenzgeschwindigkeit.

43. Grenzen des exponentiellen Wachstums *2+2+6=10 Punkte*

Unter optimalen Bedingungen vermehren sich die Bakterien einer Bakterienkultur durch Zellteilung mit einer konstanten Reproduktivitätsrate. Die Dichte der Bakterien zur Zeit t, $n(t)$, genügt unter diesen Bedingungen der DGL

$$\dot{n} = \gamma n\,, \tag{1}$$

mit einer empririsch bestimmten positiven Konstante γ.

a) Zeigen Sie, dass die DGL (1) zu einem exponentiellen Wachstumsgesetz $n(t) = n_0\,\mathrm{e}^{\gamma\,t}$ führt.

Im Falle endlicher Resourcen (Nahrung, Licht, Raum) verschlechtern sich mit zunehmender Dichte n die Lebensbedingungen eines einzelnen Bakteriums und die Reproduktivität nimmt insgesamt ab. In einem einfachen Modell verringert sich die Reproduktivitätsrate linear mit der Dichte n (lineare Näherung), demzufolge nun die Dichte $n(t)$ der DGL

$$\dot{n} \;=\; \gamma(1 - \beta n)n \tag{2}$$

genügt, wobei β ein weiterer empirisch bestimmter positiver Parameter ist.

b) Begründen Sie, dass in diesem Modell näherungsweise exponentielles Wachstum vorliegt solange $n(t) \ll 1/\beta$, für sehr große Zeiten die Dichte aber gegen den Grenzwert $n_\infty = 1/\beta$ streben wird.

c) Verifizieren Sie, dass

$$n(t) \;=\; \frac{n_\infty}{1 + (\frac{n_\infty}{n_0} - 1)\mathrm{e}^{-\gamma\,t}}$$

Lösung der DGL (2) zur Anfangsdichte n_0 bei $t = 0$ ist ($n_0 < n_\infty$). Zeigen Sie anhand dieser Lösung, dass für $t \ll \frac{1}{\gamma} \ln \frac{n_\infty}{n_0}$

$$n(t) \;\approx\; n_0 \mathrm{e}^{\gamma\,t},$$

und für $t \gg \frac{1}{\gamma} \ln \frac{n_\infty}{n_0}$

$$n(t) \;\approx\; n_\infty\,.$$

Skizzieren Sie schließlich die Lösung für $n_0 = 0.05 n_\infty$ und $\gamma = 1$.