Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 9

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 19.12.2023, 23:59 Uhr

44. In der Weihnachtsbäckerei... *3+3+3=9 Punkte*

...läuft ein mit Honig gefüllter Trichter langsam aus. Bezeichnet y die Füllhöhe des Honigs, dann ist das bei dieser Höhe im Trichter befindliche Honigvolumen gegeben durch

$$V = \frac{1}{3}\pi y^3 .$$

Der Honigausfluss am unteren Ende des Trichters $I = -\frac{dV}{dt}$ ist proportional zum Druck und damit proportional zur Höhe y, d.h.

$$I = \alpha y ,$$

mit einer empirisch bestimmten Konstanten α.

a) Stellen Sie eine DGL für die Höhe $y(t)$ auf.

b) Bestimmen Sie eine Lösung der DGL zu einem Anfangswert y_0 bei $t = 0$.

c) Der Trichter ist auf eine Höhe von $10cm$ mit Honig gefüllt und läuft nun langsam aus. Nach einer Minute ist der Füllstand auf die Hälfte abgesunken. Nach welcher Zeit ist der Trichter vollständig leer gelaufen?

45. Labiles Gleichgewicht *4+4=8 Punkte*

Ein Körper der Masse m bewegt sich längs einer Geraden. Er unterliegt einer vom Ort x des Körper abhängigen Kraft

$$F(x) = +kx, \qquad k > 0$$

und einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft

$$F(\dot{x}) = -\gamma m \dot{x} .$$

Nach Newton genügt $x(t)$ damit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \frac{k}{m} x = 0.$$

a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung dieser DGL.

b) Wie lautet $x(t)$, wenn bei verschwindender Reibung ($\gamma = 0$) der Körper zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 ruht? Skizzieren Sie $x(t)$ für $x_0 = -1$, 0 und 1 ($k = 1$, $m = 1$).

46. Matrix-Vektor- und Matrix-Matrix-Multiplikation *4 × 2=8 Punkte*

Bestimmen Sie folgende Produkte von Matrizen mit Vektoren bzw. Matrizen:

a)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\vec{e}_i, \qquad i = 1, \ldots, 4\,.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

47. Drehungen *4+1+3=8 Punkte*

Wir betrachten für einen allgemeinen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$ die 2×2-Matrix

$$D_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie für einen allgemeinen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$|D_\varphi \vec{x}| = |\vec{x}|, \qquad \measuredangle(\vec{x}, D_\varphi \vec{x}) = \varphi\,.$$

Begründen Sie damit, dass $D_\varphi \vec{x}$ der um den Winkel φ rotierte Vektor $\vec{x}$ darstellt.

b) Zeichnen Sie in die Ebene $\mathbb{R}^2$ Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{e}_1, \quad D_{\pi/4}\vec{e}_1, \quad D_{\pi/2}\vec{e}_1, \quad D_\pi \vec{e}_1, \quad D_{3\pi/2}\vec{e}_1, \quad D_{2\pi}\vec{e}_1.$$

c) Zeigen Sie schließlich, dass

$$D_\varphi D_\vartheta \;=\; D_{\varphi+\vartheta}$$

Was ist die geometrische Bedeutung dieser Relation?