Lösungshinweise Blatt 10

49)

- $\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

- $\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

  z.B. Regel von Sarrus

- $\det\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \text{"} \quad \text{"} = 24$

  obere Dreiecksmatrix

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

  $-, \cdot \tfrac{1}{2}$ $\qquad$ $-, \cdot 2$

$= -\det\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -(-1)(-4)\cdot 3\cdot 4 = -48.$

obere Dreiecksmatrix

50) • A : a) hinschauen und erkennen, dass $\vec{u}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_\pm = \pm a$ sind.

b) $0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a^2$

$\rightarrow$ Nullstellen = Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm a$ mit Eigenvektoren $\vec{u}_\pm$ bestimmt durch

$$(A - \lambda_\pm I_2)\, \vec{u}_\pm = \vec{0} \quad ;$$

d.h.
- $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \vec{u}_+ = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \vec{u}_- = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• B hat offenbar Eigenwerte a, b, c mit Eigenvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

• $C = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & b \end{pmatrix} \rightarrow$ Eigenwerte $a, -a, b$

mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

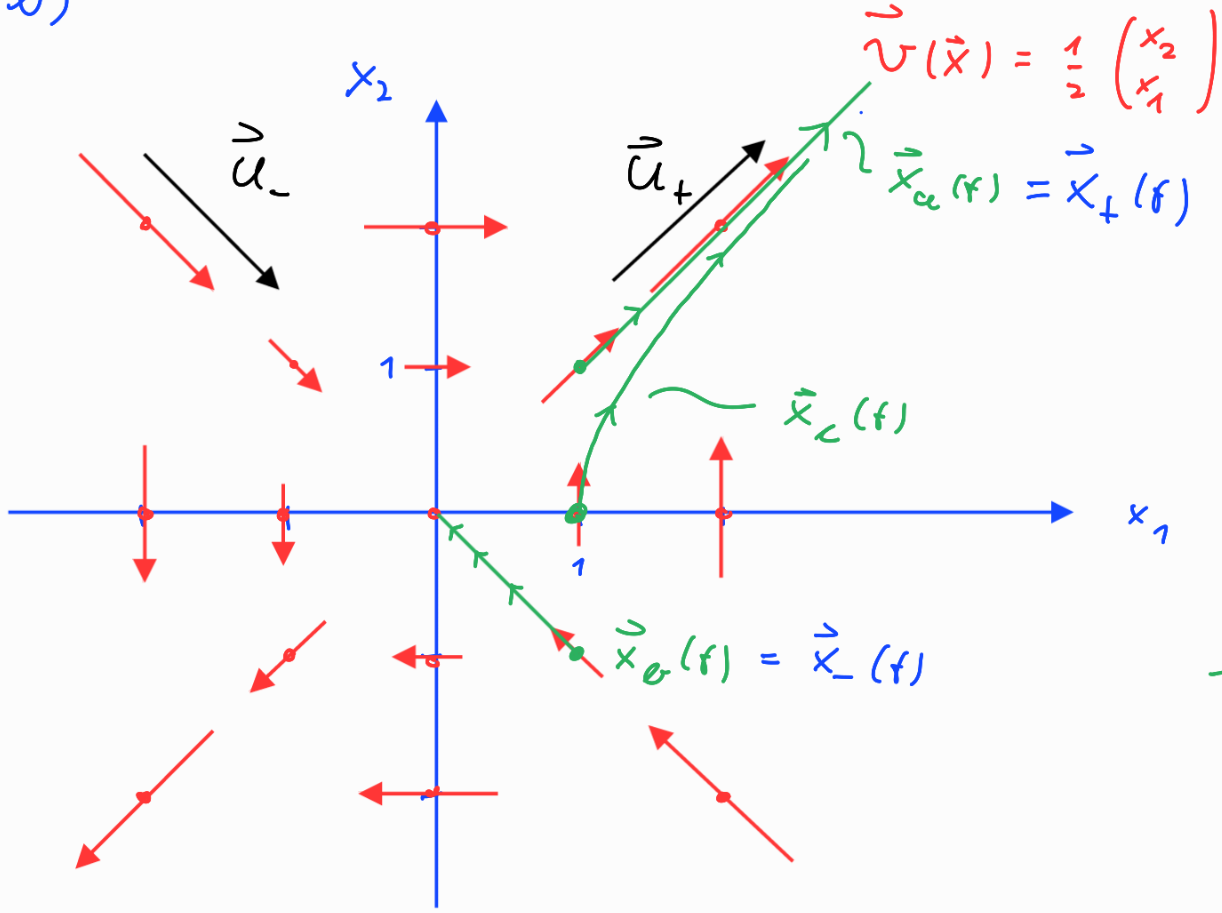
D: $\quad 0 \overset{!}{=} \det\left(D - \lambda I_3\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} \lambda^2(b-\lambda) - a^2(b-\lambda)$$

Nullstellen = Eigenwerte $\quad \lambda_1 = a, \; \lambda_2 = -a, \; \lambda_3 = b$

mit Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

51) a, b)



c)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \gamma\, x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \gamma\, x_1(t) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}_{=: W} \vec{x}(t)$$

d) $\dot{\vec{x}}(t) = \underline{\lambda} \vec{u} e^{\lambda t} \overset{!}{=} W x(t) = \underline{W} \vec{u} e^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda \vec{u} \overset{!}{=} W \vec{u}$

d.h. $\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{\lambda t}$ ist Lsg. g.d.w. λ

EW von W mit EV $\vec{u}$

W hat Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm \gamma$ mit EVen

$\vec{u}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ (vgl. Aufg. 50)

→ spezielle Lsgen $\vec{x}_+(t) = \vec{u}_+ e^{\gamma t} = \vec{x}_a(t)$

$\vec{x}_-(t) = \vec{u}_- e^{-\gamma t} = \vec{x}_b(t)$

2s allg. Lsg: $\vec{x}(t) = c_+ \vec{x}_+(t) + c_- \vec{x}_-(t)$

d.h. $\vec{x}(t) = c_+ \vec{u}_+ e^{\gamma t} + c_- \vec{u}_- e^{-\gamma t}$

a) $\vec{x}_a(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_+ \quad \rightarrow c_+ = 1,\ c_- = 0, \rightarrow \vec{x}_a(t) = \vec{u}_+ e^{\gamma t}$ ✓

b) $\vec{x}_b(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{u}_- \quad \rightarrow c_+ = 0,\ c_- = 1, \rightarrow \vec{x}_b(t) = \vec{u}_- e^{-\gamma t}$ ✓

c) $\vec{x}_c(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{\vec{u}_+ + \vec{u}_-}{2} \quad \rightarrow c_+ = c_- = \frac{1}{2}$ ⟶

$$\vec{x}_c(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\gamma t} + e^{-\gamma t} \\ e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}\end{pmatrix} \quad \left[= \begin{pmatrix}\cosh(\gamma t)\\ \sinh(\gamma t)\end{pmatrix}\right]$$

f)

$$\vec{x}_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon - 1\end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(\vec{u}_+ - \vec{u}_-\right) + \vec{u}_- = \frac{\varepsilon}{2}\vec{u}_+ + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\vec{u}_-$$

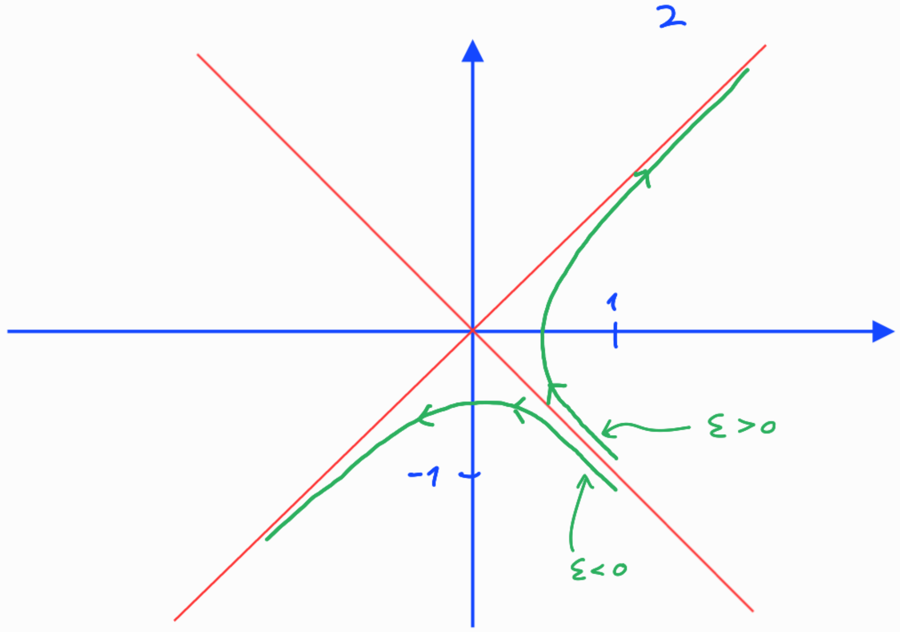
$\rightarrow$ $c_+ = \frac{\varepsilon}{2}$, $c_- = 1 - \varepsilon/2 \simeq 1$ $\quad (|\varepsilon| \ll 1)$

also

$$\boxed{\vec{x}_\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\vec{u}_+ e^{\gamma t}}_{\text{dominant für } t \gg 1/\gamma} + \underbrace{\vec{u}_- e^{-\gamma t}}_{\text{dominant für } t \ll 1/\gamma}}$$

$\rightarrow$ für $t \ll 1/\gamma$: $\quad \vec{x}_\varepsilon(t) \approx \vec{u}_- e^{-\gamma t}$

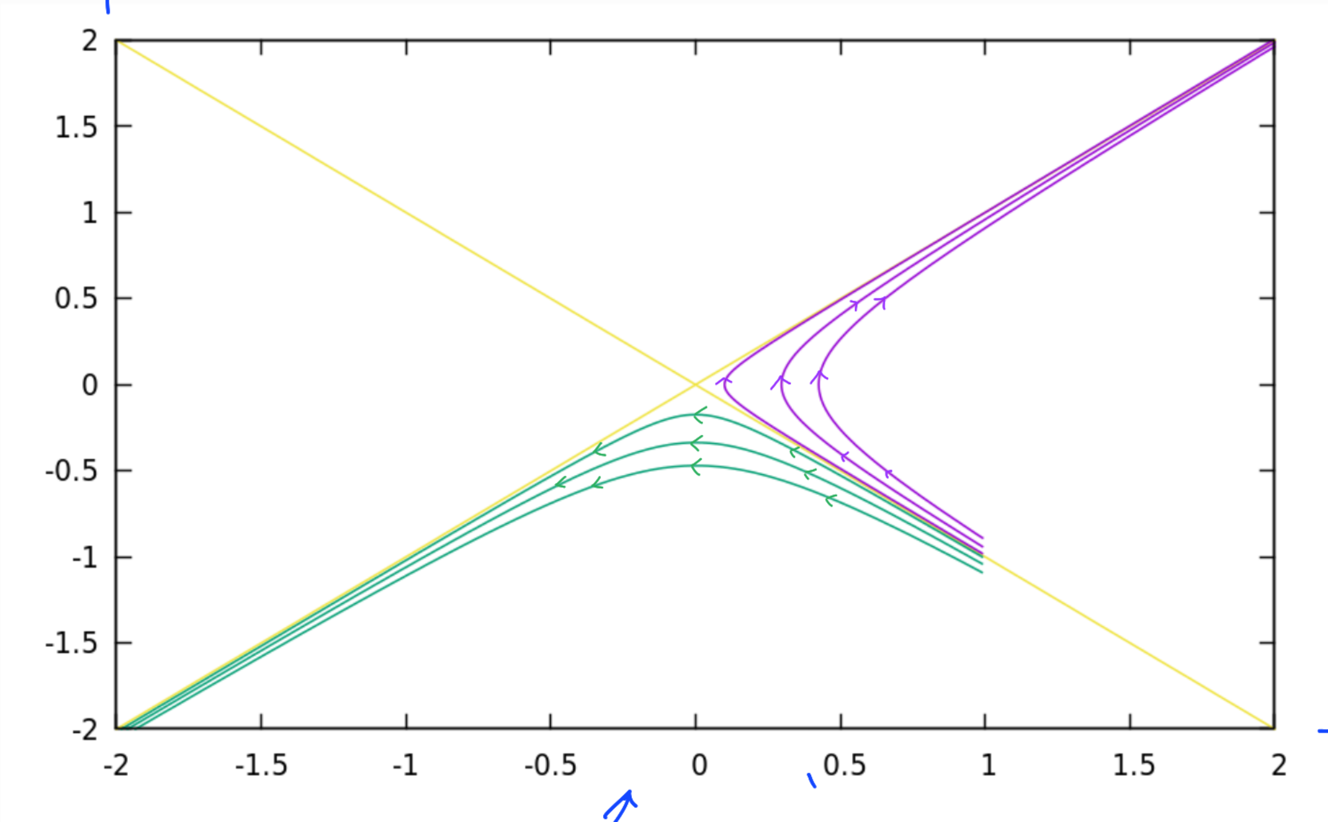
für $t \gg 1/\gamma$: $\quad \vec{x}_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2}\vec{u}_+ e^{+\gamma t}$



Schöner mit numerischer Euler-Iteration

(python + gnuplot):

$x_2 \uparrow$



$\to x_1$

Stromlinien $\vec{x}_\varepsilon(t)$ für $\varepsilon = \pm 0.1, \pm 0.5, \pm 0.01$