Lösungshinweise

Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematische Methoden – Blatt 3

Wintersemester 2023/24

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth_23.html/*
https://ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5384977.html

Abgabe: Dienstag, den 7.11.2023, 23:59 Uhr

9. Zur Diskussion

0 Punkte

a) Wie berechnet man das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. einer ONB?

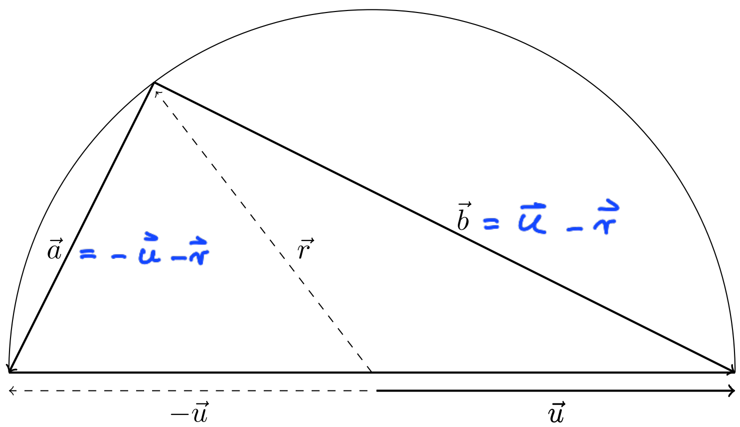
b) Die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $(0,0)$, (x_1, x_2) und (y_1, y_2). Weshalb ist dann der Flächeninhalt des Dreiecks durch $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ gegeben?

c) Was ist die Ableitung einer Funktion?

10. Satz des Thales

4 Punkte

Ein Dreieck ist wie in der Skizze einem Halbkreis eingeschrieben. Nach dem Satz des Thales ist ein so konstruiertes Dreieck immer ein rechtwinkliges Dreieck. Beweisen Sie diesen Satz mittels des Skalarprodukts. Hinweis: Stellen Sie die Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{r}$ dar und beachten Sie, dass $|\vec{u}| = |\vec{r}|$ (warum?).



$\rightsquigarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{u} + \vec{r}, \vec{u} - \vec{r} \rangle = -|\vec{u}|^2 + |\vec{r}|^2 = 0$

11. Prallelogramm

3+3=6 Punkte

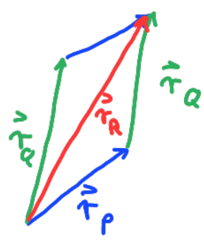
Vier Raumpunkte seien durch ihre kartesischen Koordinaten $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ und $(1,2,3)$ gegeben.
$\hookrightarrow O$ $\hookrightarrow P$ $\hookrightarrow Q$ $\hookrightarrow R$

a) Zeigen Sie, dass diese Punkte die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

a) Ortsvektoren $\vec{r}_O = \vec{0}$, $\vec{r}_P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}_Q = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}_R = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

genügen $\vec{OR} = \vec{r}_R \overset{!}{=} \vec{r}_P + \vec{r}_Q$ ✓



b) $A = |\vec{r}_P \times \vec{r}_Q| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$.

12. Koordinaten

5+4=9 Punkte

a) Skizzieren Sie hier die jeweils angegebenen Teilmengen der euklidischen Ebene.

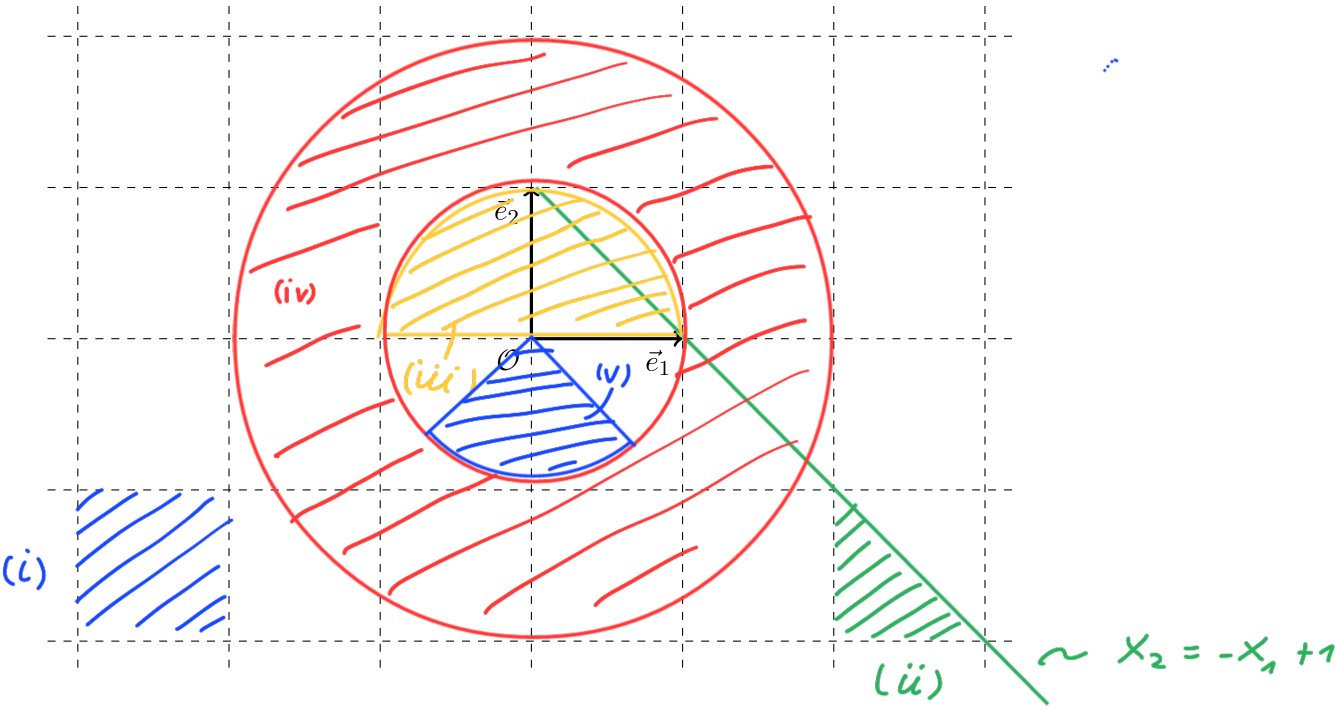
(i) Punkte mit kartesischen Koordinaten $-3 \leq x_1 \leq -2$ und $-2 \leq x_2 \leq -1$.

(ii) Punkte mit kartesischen Koordinaten $2 \leq x_1 \leq 3$ und $-2 \leq x_2 \leq -x_1 + 1$.

(iii) Punkte mit Polarkoordinaten $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$.

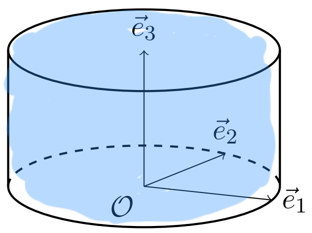
(iv) Punkte mit Polarkoordinaten $1 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(v) Punkte mit Polarkoordinaten $0 \leq r \leq 1$ und $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$.

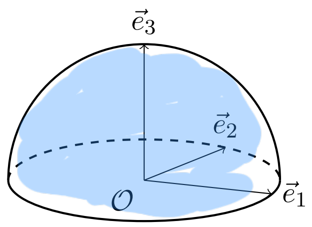


b) Geben Sie für die folgend skizzierten Körper jeweils die in ihnen enthaltenen Raumpunkte durch geeignete Koordinaten an.

(i)



(ii)



Zylinderkoord.:

- $0 \leq \rho \leq 1$
- $0 \leq \varphi < 2\pi$
- $0 \leq z \leq 1$

Kugelkoord.:

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

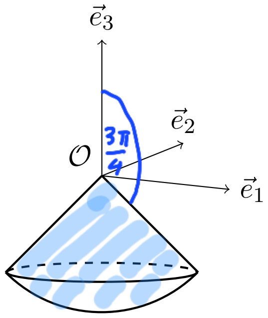
$0 \leq \vartheta \leq \pi/2$

Kugelkoord.: $\bullet\ 0 \le r \le 1$

$\bullet\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

$\bullet\ \frac{3\pi}{4} \le \vartheta \le \pi$

(iii)

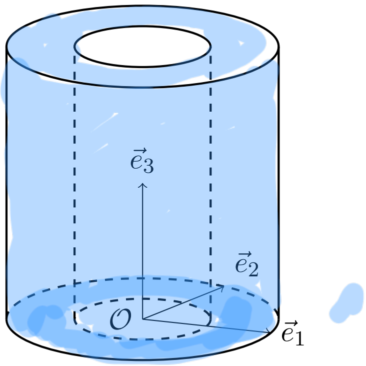


Zylinderkoord.: $\bullet\ \frac{1}{2} \le \varrho \le 1$

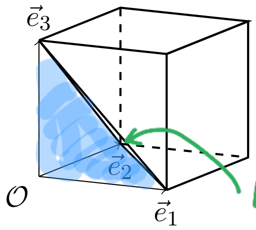
$\bullet\ 0 \le \varphi < 2\pi$

$\bullet\ 0 \le z \le 2$

(iv)



(v)



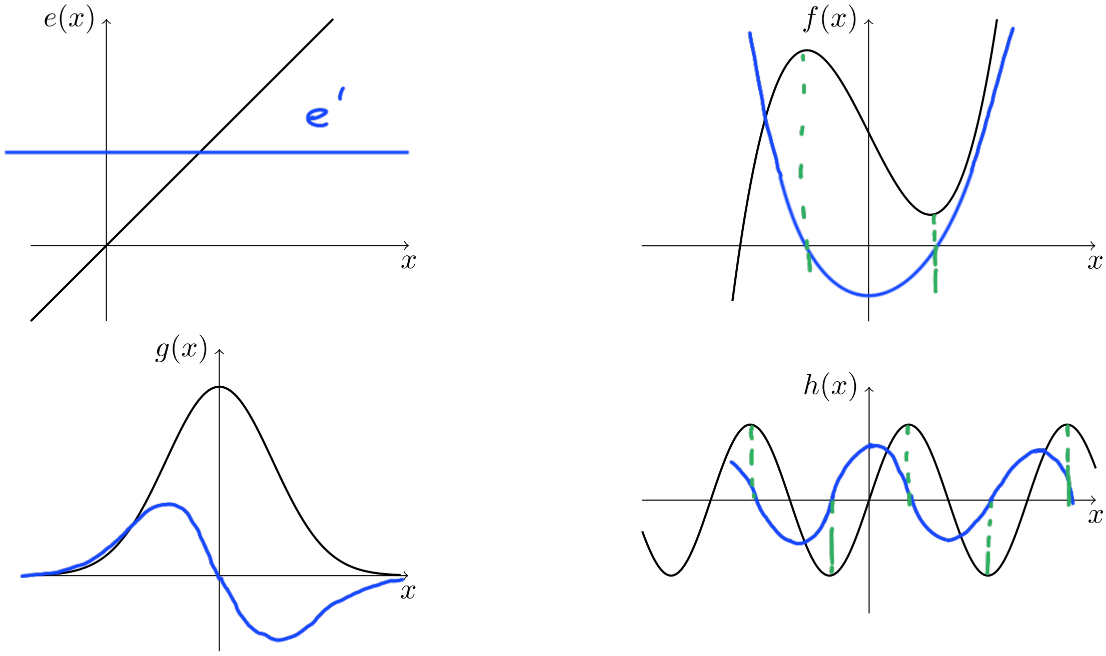
Ebene $x_1+x_2+x_3=1$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

und $x_1 + x_2 + x_3 \le 1$

13. Ableitungen aus dem Funktionsgraphen *4 Punkte*

Skizzieren Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:



14. Differenzenquotient *5 Punkte*

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$ elementar mit Hilfe des Differenzenquotienten.

$$\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{(x+h)x}\right)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{h}}\,\frac{\cancel{h}}{x^2+xh} = \frac{-1}{x^2+hx} \xrightarrow{h=0} -\frac{1}{x^2}$$

d.h. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.