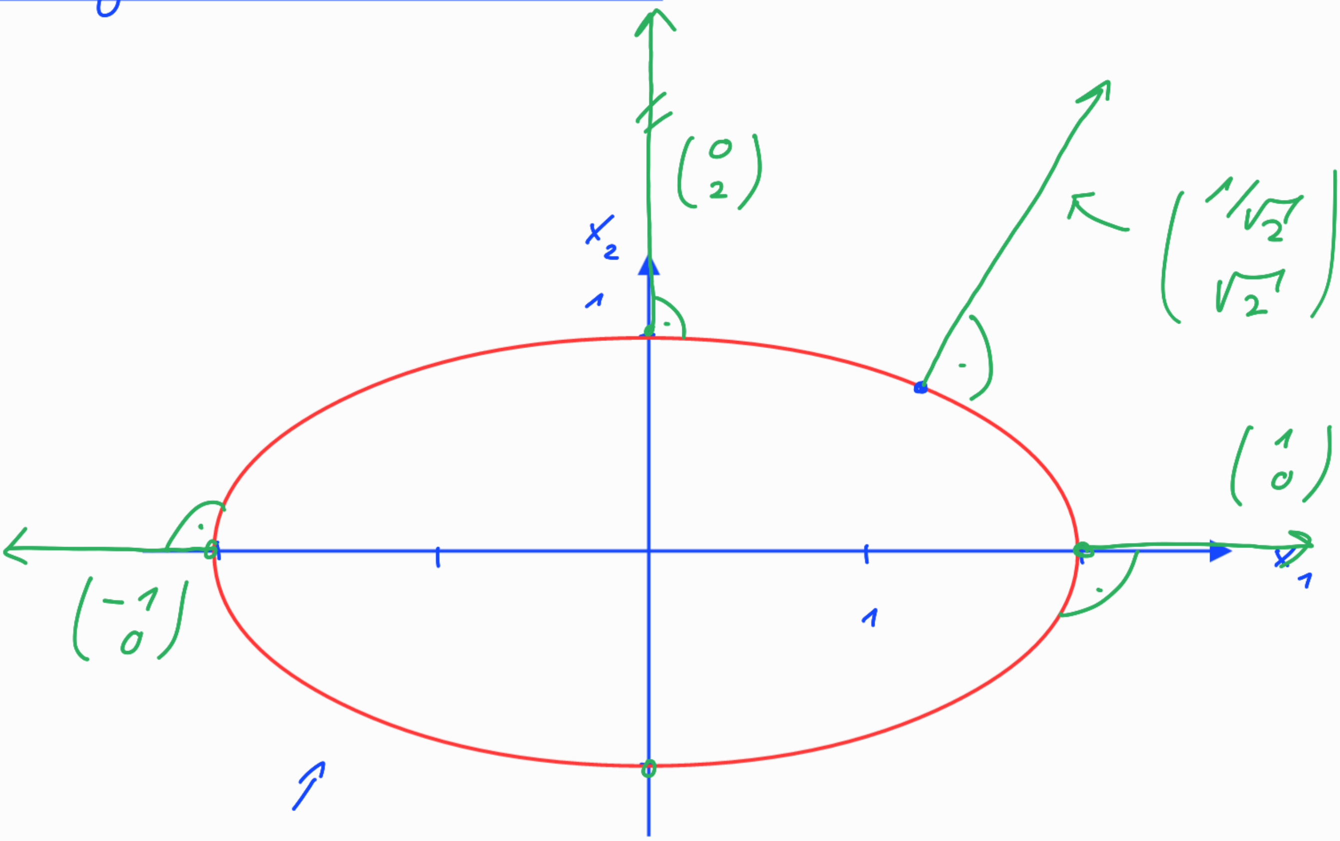
Lösungshinweise Blatt 5

23)



Ellipse mit Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$,

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} \\ 2x_1 \end{pmatrix}.$$

24)

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{a}$$

$$\operatorname{grad} g(\vec{r}) = -\frac{2\vec{a}}{\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle^3}$$

$$\operatorname{grad} h(\vec{r}) = -\frac{1}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

$$\operatorname{grad} j(\vec{r}) = h\,\vec{r}$$

25) • $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho}\right| = 1$

d.h. $\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\varrho \sin\varphi \\ \varrho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \varrho$

d.h. $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$

d.h. $\vec{e}_z = \vec{e}_3$.

26) a) Der Pfeil unterliegt der Schwerkraft $\vec{F} = m\vec{g}$ und ist somit nach Newton konstant beschleunigt mit $\vec{g}$; da $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{g}$ ist $\vec{r}(t)$ eine mögliche Bahn des Pfeils.

b) $x_1(T) = v\cos\vartheta \cdot T \overset{!}{=} s \quad \to \quad T = \frac{s}{v\cos\vartheta}$

$\to \quad a = x_2(T) = v\sin\vartheta \, T - \frac{g}{2} T^2$

$$= s\left(\tan\vartheta - \frac{gs}{2v^2\cos^2\vartheta}\right)$$

$$=: a(v, \vartheta)$$

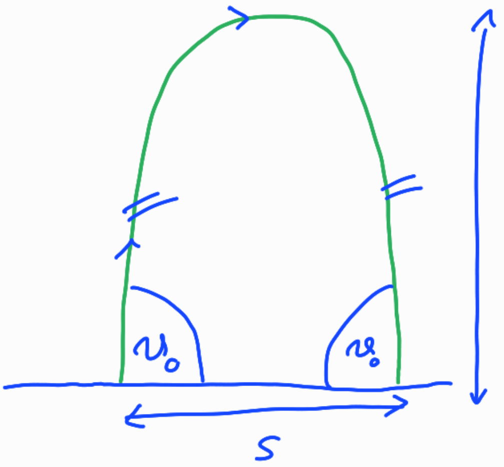
1) $a(v_0, \vartheta_0) \overset{!}{=} 0$

$\iff \quad v_0^2 = \frac{gs}{2\sin\vartheta\cos\vartheta} = \frac{gs}{\sin(2\vartheta_0)}$

d.h. $\quad v_0 = \left(gs / \sin(2\vartheta_0) \right)^{1/2}$

∘ $\vartheta_0 = 0$: strikt horizontaler Wurf wegen $\vec{g} \neq 0$ nur für $v_0 \to \infty$

∘ $\vartheta_0 \to \frac{\pi}{2}$:



$H \xrightarrow[\vartheta_0 \to \pi/2]{} \infty$

$H \to \infty$ erfordert $v_0 \to \infty$

∘ v_0 minimal für $\sin(2\vartheta_0)$ maximal, d.h. $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$

d) in lin. Näherung:

$$a(v_0+\Delta v, \vartheta_0) = \underbrace{a(v_0,\vartheta_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial v}(v_0,\vartheta_0)\Delta v}_{\Delta a} + \mathcal{O}(\Delta v^2)$$

$$\Delta v = 0.01\, v_0$$

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{g s^2}{\cos^2\vartheta} \cdot \frac{1}{v^3}$$

$$\rightsquigarrow \Delta a = \underbrace{\frac{g s^2}{v_0^2}}_{= s \sin(2\vartheta_0)} \frac{1}{\cos^2\vartheta_0} \cdot \frac{0.01\, v_0}{v_0}$$

$$s \sin(2\vartheta_0) = 2s \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0$$

$$= \underbrace{2s}_{=4{,}74\,\mathrm{m}} \underbrace{\tan\vartheta_0}_{=0{,}176} \cdot 0.01 = 8{,}4\,\mathrm{mm}$$

e)

$$a(v_0, \vartheta_0+\Delta\vartheta) = \underbrace{a(v_0,\vartheta_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial \vartheta}(v_0,\vartheta_0)\Delta\vartheta}_{\Delta a} + \mathcal{O}(\Delta\vartheta^2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = s\left(\frac{1}{\cos^2\vartheta} - \frac{g s}{v^2\cos^3\vartheta} \cdot \sin\vartheta\right)$$

$$\rightsquigarrow \Delta a = s\left(\frac{1}{\cos^2\vartheta_0} - \underbrace{\frac{g s}{v_0^2}}_{=2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0} \frac{1}{\cos^3\vartheta_0} \sin\vartheta_0\right)\Delta\vartheta$$

$$\Delta\vartheta = \frac{2\pi}{360}\, 0.25$$

$$= s\left(\frac{1-2\sin^2\vartheta_0}{\cos^2\vartheta_0}\right)\Delta\vartheta = s\left(1-\underbrace{\tan^2\vartheta_0}_{0.97}\right)\Delta\vartheta = 10\,\mathrm{mm}$$