HDI:

1) $$F_u(x) := \int_u^x f(\tilde{x})\, d\tilde{x} \quad \text{St. fkt zu } f$$

d.h. $$\frac{d}{dx} \int_u^x f(\tilde{x})\, d\tilde{x} = f(x)$$

2) $$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Notation: $F(x) \equiv \int f(x)\, dx$

Stammfunktion = "unbestimmtes Integral"

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Substitution

$$\int_a^b f(x)\, dx \underset{x = g(y)}{=} \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\, g'(y)\, dy$$

Bsp: P.I:

$$\int_a^b \underset{g(x)}{x}\, \underset{f'(x)}{\cos x}\, dx = \underset{g(x)}{x}\, \underset{f(x)}{\sin x}\Big|_a^b - \int_a^b \underset{g'(x)}{1}\, \underset{f(x)}{\sin x}\, dx$$

$$= x\sin x\Big|_a^b + \cos x\Big|_a^b$$

$$= \underbrace{(x\sin x + \cos x)}_{F(x):\ \text{S.F. zu } x\cos x\ !(?)}\Big|_a^b$$

$$[\ F'(x) = \cancel{\sin x} + x\cos x - \cancel{\sin x} = x\cos x \checkmark\ ]$$

Substitution:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{x=\sin y}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{=\cancel{\cos y}}} \cdot \cancel{\cos y}\, dy$$

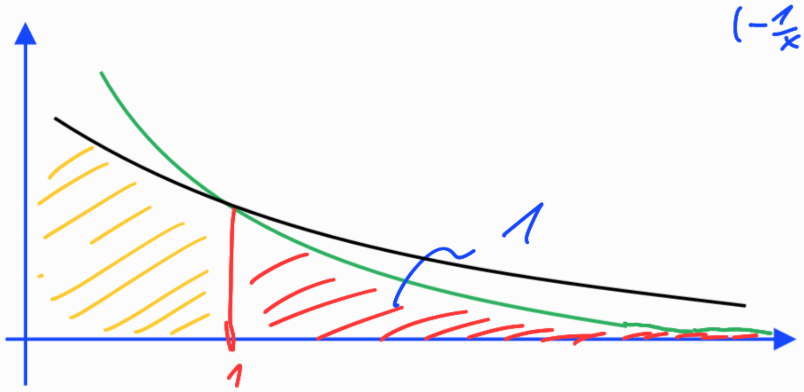
$$= \int_0^{\pi/2} 1\, dy = \pi/2.$$

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\arcsin b} 1\, dy = \arcsin b$$

HDI $\Rightarrow$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$!

Uneigentliche Integrale

- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=\left(-\frac{1}{x}\right)'}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)$$



$$= \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

$$= 1$$

- $$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{=(2\sqrt{x})'}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) \longrightarrow \infty$$

- $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_a^1\right)$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(-1+\frac{1}{a}\right) \longrightarrow \infty$$

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{a \to 0} 2\sqrt{x}\,\Big|_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2$$

Komplexe Zahlen

1) mathem. Werkzeug

2) Fundament. physikalische Bedeutung in der Quantenmechanik:

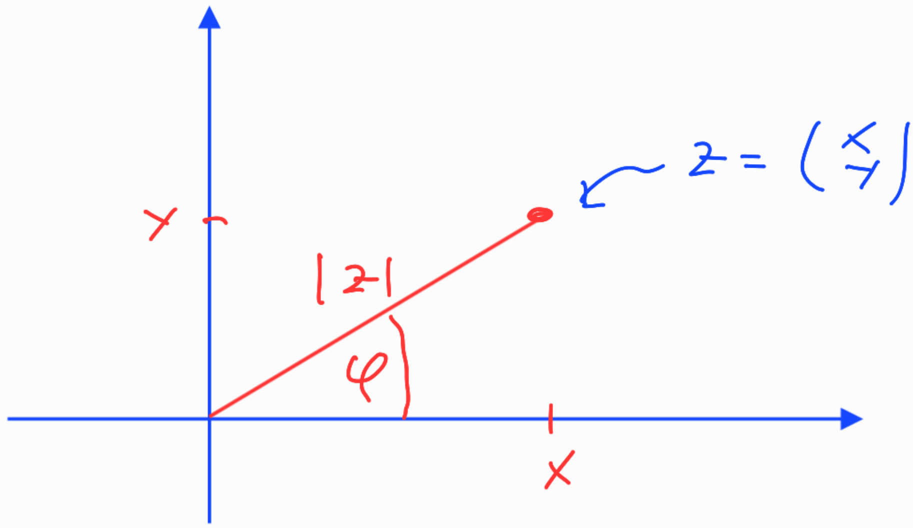
Zustandsraum $\stackrel{!}{=}$ komplexe Vektorraum !

algebraisch:

imaginären Einheit: $i = \sqrt{-1}$

<u>geometrisch</u>:

komplexe Zahl $\underline{z} = $ Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$: Menge der kompl. Zahlen

("komplexe Ebene"

"Gaußsche Zahlenebene")

<u>Betrag</u> $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

<u>Argument</u> $\quad \arg z = \varphi$

$= $ "$\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{z})$"

<u>Polardarstellung</u>:

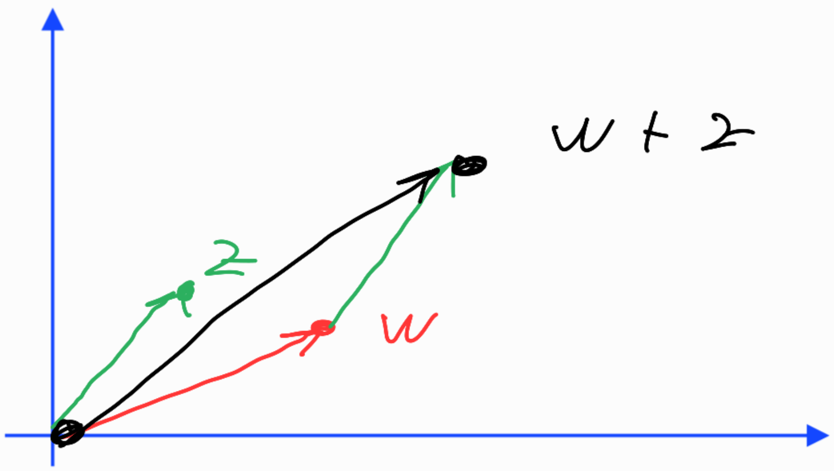
$$z = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Addition komplexer Zahlen

$\overset{\text{Def}}{:=}$ Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$:

$w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad \underline{\underline{w + z}} = \begin{pmatrix} a + x \\ b + y \end{pmatrix}$



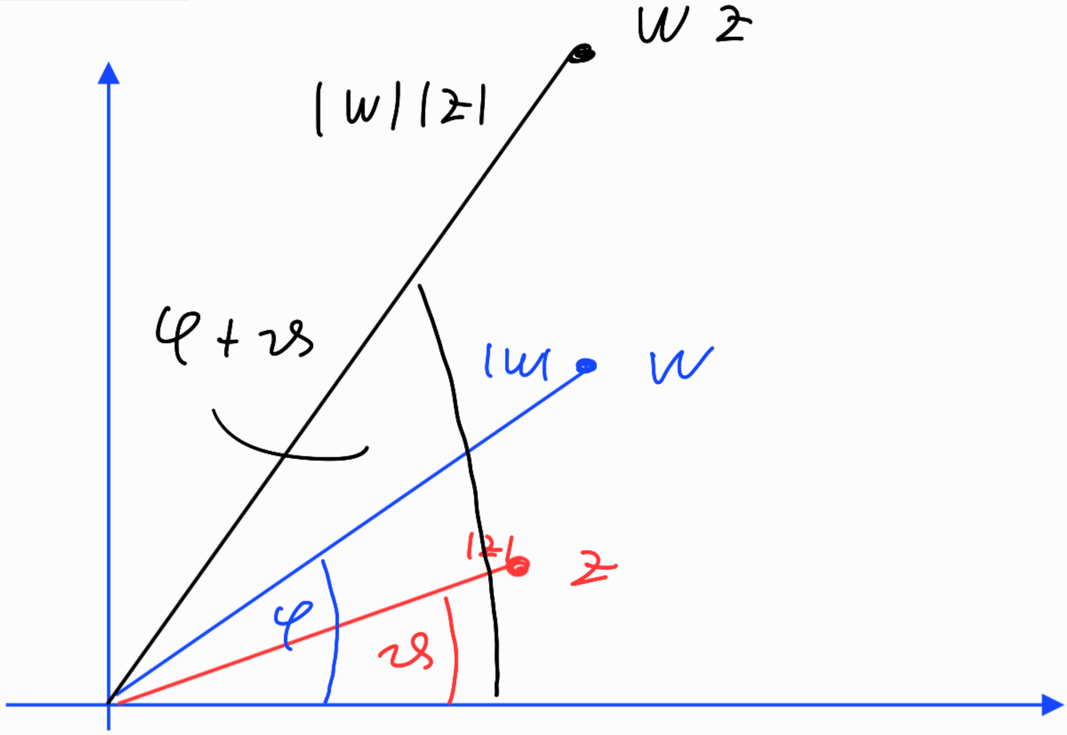
$\rightarrow$ Eigenschaften A1 – A4 ✓

<u>Multiplikation kompl. Zahlen</u>

$w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Def:
$$\boxed{wz := \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}}$$

geometrisch:



warum?

$$z = \begin{pmatrix} |z| \cos\vartheta \\ |z| \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} |w| \cos\varphi \\ |w| \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{wz} = \begin{pmatrix} |z||w| \big(\underbrace{\cos\vartheta \cos\varphi - \sin\vartheta \sin\varphi}_{\cos(\vartheta+\varphi)} \big) \\ |z||w| \big(\underbrace{\cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\varphi}_{\sin(\vartheta+\varphi)} \big) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{|z||w|} \underline{\begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) \\ \sin(\vartheta+\varphi) \end{pmatrix}}$$

Eigenschaften der komp. Multiplikation

(1) kommutativ: $wz = zw$ ✓

(2) assoziativ:

$$v(wz) = (vw)z$$ ✓

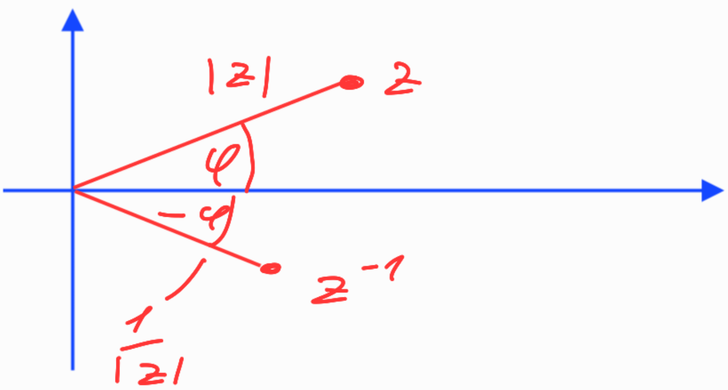
(3) Einselement der Multiplikation

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot z = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = z$

(4) Inverse von z bzgl. Multiplikation

$$z = |z| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \left(\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$ ✓



Distributivgesetz:

$$v(w+z) \overset{!}{=} vw + vz \quad ✓$$

⇝ komplexe Addition und Multiplikation genügt den selben Regeln wie reelle Add. und Multiplikation

⇝ Rechnungen im komplexen genau wie im reellen!

Reelle Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$, imaginäre Einheit, Real- und Imaginärteil

$$\begin{pmatrix} a \\ \cancel{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ \cancel{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\cancel{\;}}{+} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a+x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{ax} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Identifikation:

$$\mathbb{R} \ni x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\ulcorner$ $$x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ xb \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$\lrcorner$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Realteil von z: $\operatorname{Re} z = x$

Imaginärteil von z: $\operatorname{Im} z = y$

Def: imaginäre Einheit:

$$\mathbb{C} \ni i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \quad i^2 = i\,i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$