# Differenzialgleichungen

z.B. zur Bestimmung der zeitlichen Entwicklung eines System-Zustands:

$$\dot{y}(t) = f(y(t))$$

$\Rightarrow \quad y(t)$ !

„Dynamik"

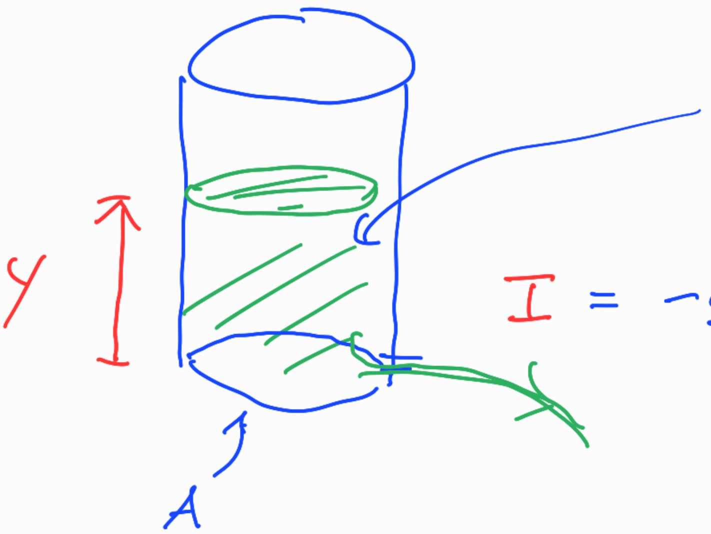
Mechanik: Hamiltonsche Gleichungen ($\Leftrightarrow$ Newt. Glg.)

QM: Schrödinger-Gl.

ED: Maxwellsch. Glen

TD: Wärmeleitungsgl.

Beispiel: auslaufender Flüssigkeitsbehälter:




$$V(t) = A\, y(t)$$

$$I = -\frac{dV}{dt}$$

Zustand: Höhe der Flüssigkeit im Behälter.

$$y(t)$$

Zustandsänderung: bestimmt durch Volumenstrom $I$ !

einerseits: $I = -\frac{dV}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(A\, y(t)\right) = -A\, \dot{y}(t)$

andererseits: $I$ Funktion des Drucks $p(y)$

?

$\rightarrow p = \rho g y$

Fall a): zähe Flüssigkeit: $I(p) = \alpha p$

$\alpha$ Konstante

$p = \rho g y$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} I(y) = \alpha \rho g y \\ I = -A\dot{y} \end{array}\right\}$$

$$\dot{y}(t) = -\underbrace{\frac{\alpha \rho g}{A}}_{=a} y(t)$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = -a\, y(t)}$$

Differenzial-gleichung

$\Rightarrow y(t) = ?$

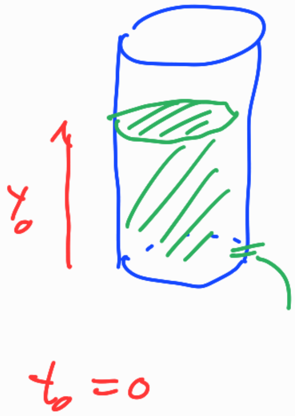
Fall b): ideale Flüssigkeit: $I(p) \overset{!}{=} \beta \sqrt{p}$

$$p = \rho g y \rightarrow \left.\begin{array}{l} I = \beta \sqrt{\rho g y} \\ I = -A\dot{y} \end{array}\right\}$$

$$\dot{y}(t) = -\underbrace{\frac{\beta\sqrt{\rho g}}{A}}_{=b} \sqrt{y(t)}$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = -b\sqrt{y(t)}} \rightarrow y(t) = ?$$

Konkret im Fall a):



ges.: Höhe zur Zeit $t=0$

$y_0$

(„Anfangswert")

ges: Höhe zu Zeiten $t > 0$:

$y(t)$

(„Lösung zum Anfangswert $y_0$ bei $t=0$)

d.h.: Finde Funktion $y(t)$ derart, dass

(i) $\dot{y}(t) = -a\,y(t)$

(ii) $y(0) = y_0$

!

$\dot{y}(t) = y(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = c\,e^{t}$

$\dot{y}(t) = \lambda\,y(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = c\,e^{\lambda t}$

$\dot{y}(t) = -a\,y(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = c\,e^{-at}$ ✓

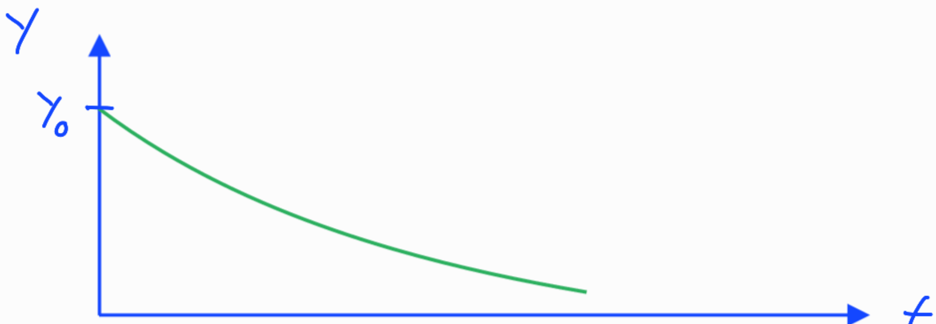
wähle $c = y_0$: $\boxed{y(t) = y_0\,e^{-at}}$

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{-at}}$$

⌐ erfüllt (i): $\dot{y}(t) = y_0\,(-a)\, e^{-at} = -a\, y(t)$ ✓

$= y(t)$

(ii) $y(0) = y_0\, e^{-0} = y_0$ ✓ ┘




**Def.:**

Eine Funktion $y: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ ist
$x \mapsto y(x)$

spezielle Lösung der Differenzialgleichung (DGL)

$$y' = f(y, x)$$

zum Anfangswert $y_0$ für $x = x_0$ g.d.w.

(i)
$$y'(x) \overset{!}{=} f(y(x), x) \quad \text{für alle } x \in [x_1, x_2]$$

(ii)
$$y(x_0) = y_0$$

Eine allgemeine Lösung $Y_c(x)$ erfüllt (i) und enthält einen frei wählbaren Parameter.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
→ Mathematik

<u>Lösungen und Lösungsverfahren für gewisse Typen von DGLen</u>

1) <u>triviale DGL</u>: $f(\cancel{y}, x)$

$$\rightarrow \quad y'(x) = f(x)$$

→ allg. Lösung: Stammfkt. von $f$:

$$Y_c(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + c$$

Lsg. zum AW $Y_0$ bei $x = x_0$

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + Y_0 .$$

2) homogene lineare DGL:

$$\boxed{y'(x) = \underline{\underline{g}}(x)\, y(x)}$$

allg. Lösung:
$$\boxed{y_c(x) = c\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

$$\Big[\quad y_c'(x) \overset{!}{=} \underbrace{c\, g(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}_{= y_c(x)} \overset{!}{=} g(x)\, y_c(x) \quad ! \quad \checkmark$$

spez. Lsg. $y(x)$ zum AW $y_0$ bei $x = x_0$

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}}$$

$\Big[$ Spezialfall: $g(x) = \lambda, \quad x_0 = 0$

$$\rightarrow \qquad y(x) = y_0\, e^{\lambda x}$$

sp. Lsg. der DGL $y' = \lambda y$ zum AW $y(0) = y_0$.

$$\Big[ \quad \int_0^x \lambda\,du = \lambda x \quad \Big] \quad \Big]$$

3) inhomogene lineare DGL

$$\boxed{y' = g(x)\, y + \underbrace{f(x)}_{\text{Inhomogenität}}} \quad (*)$$

(i) bestimme allgemeine Lsg $y_c^h(x)$ der homogenen DGL $y' = g(x)\, y$

(d.h. $y_c^h(x) = c\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\, du}$ )

(ii) bestimme eine spezielle Lsg $y_s(x)$ der inhomogenen DGL (*)

$$\rightarrow \quad \boxed{y_c(x) = y_c^h(x) + y_s(x)}$$

ist allg. Lsg. der inhomogenen DGL (*)

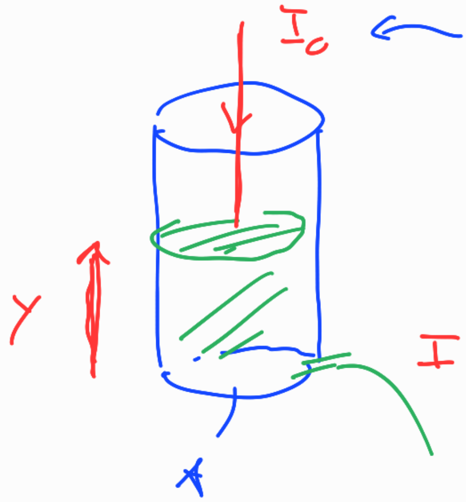
[

$$y_c'(x) = \underbrace{\left(y_c^h(x)\right)'}_{g(x)\, y_c^h(x)} + \underbrace{y_s'(x)}_{g(x)\, y_s(x) + f(x)}$$

$$= g(x) \underbrace{\left(y_c^h(x) + y_s(x)\right)}_{= y_c(x)} + f(x) = g(x)\, y_c(x) + f(x) \quad ✓$$

]

Bsp.:




$I_0$ ← konstanter Zulauf

$$\rightarrow \boxed{\dot y(t) = -a\, y(t) + J_0}$$

$J_0 = I_0/A$ ↑ Inhomogenität (konstant!)

(i) allg. Lsg. der homogenen DGL $\dot y = -a y$

$$\rightarrow \quad y^h_c(t) = c\, e^{-at} \quad ✓$$

(ii) spezielle Lsg der inhomogenen DGL:

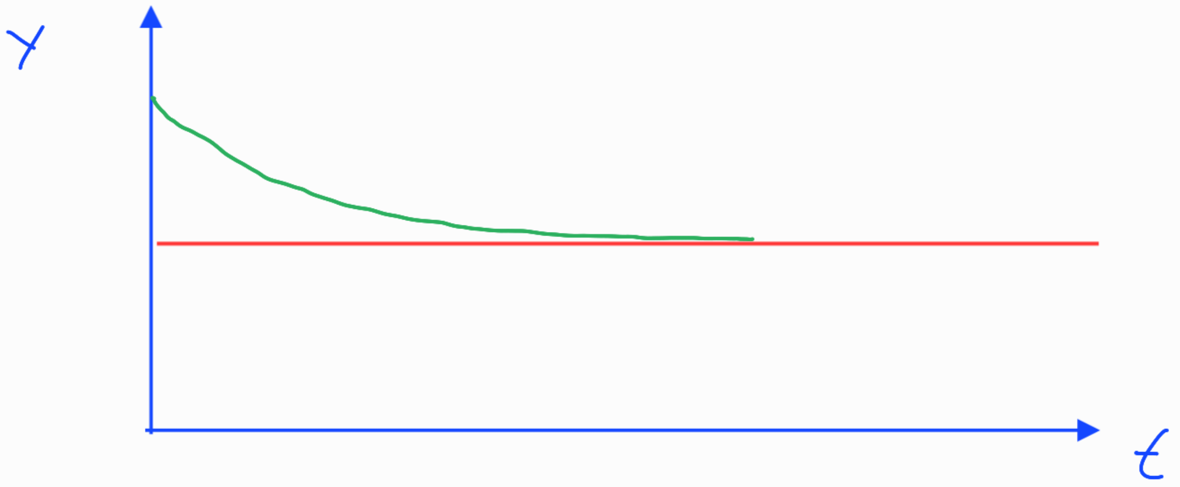
konstante Fkt: $y_s(x) = J_0/a$

offenbar Lsg!

$$\Rightarrow \quad y_c(x) = c\, e^{-at} + J_0/a$$

→ Lsg. zum AW $y(0) = y_0$,

$$\boxed{y(x) = \left(y_0 - J_0/a\right) e^{-at} + J_0/a}$$




3) Separierbare DGL:

$$\boxed{y' = g(x) f(y)}$$

Spez. Lsg. $\underline{\underline{y(x)}}$ zum AW $y(x_0) = y_0$

bestimmt durch:

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} g(u)\, du}$$

$\frac{d}{dx}$

$$\frac{1}{f(y(x))} \cdot y'(x) = g(x)$$

$\Rightarrow$ $y'(x) = g(x) f(y(x))$ !