Wiederholung:

Differenzialgleichung (DGL): $\boxed{y' = f(y, x)}$

• spezielle Lösung zum A.W. y_0 bei x_0:

= Funktion (!) $y(x)$ mit

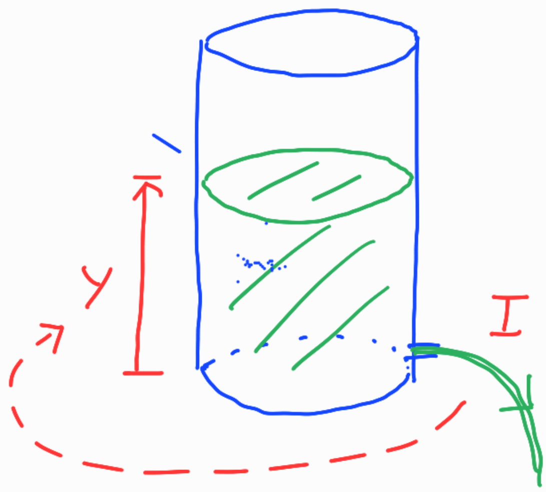
(i) $y'(x) = f(y(x), x)$ für alle $x \in D$

(ii) $y(x_0) = y_0$

• allgemeine Lösung $y_c(x)$ (Funktion!)

erfüllt (i) und enthält freien Parameter c

Bsp.:



$y(t) \to p(y(t)) \to I(y(t)) \to \dot{y}(t)$

$\Rightarrow$ DGL:

a) $\dot{y}(t) = -a\,y(t)$ (zähe Fl.)

b) $\dot{y}(t) = -b\sqrt{y(t)}$ (ideale Fl.)

DGL-Typen und deren Lösungen:

1) trivicale DGL: $y' = f(x)$

$$\rightarrow \quad y(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du + y_0$$

2) homogene lineare DGL: $y' = g(x)\,y$

$$\rightarrow \quad y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\,du}$$

(z.B. $\dot{y} = -ay \rightarrow y(t) = y_0\, e^{-at}$)

3) inhomogene lin. DGL: $y' = g(x)\,y + f(x)$

$$\rightarrow \quad y_c(x) = y_c^h(x) + y_s(x)$$

y_s: spezielle Lsg der inhomog. DGL

y_c^h: allg. Lsg der homogenen DGL $\dot{y} = g(x)\,y$

4) Separierbare DGL: $y' = g(x)\, f(y)$

$\rightarrow$ $y(x)$ zum A.W. y_0 bei x_0 bestimmt durch

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} g(u)\, du}$$

(i) beide Integrale ausführen

(ii) nach $y(x)$ auflösen

„Trennung der Variablen"

Merkschema:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, f(y)$$

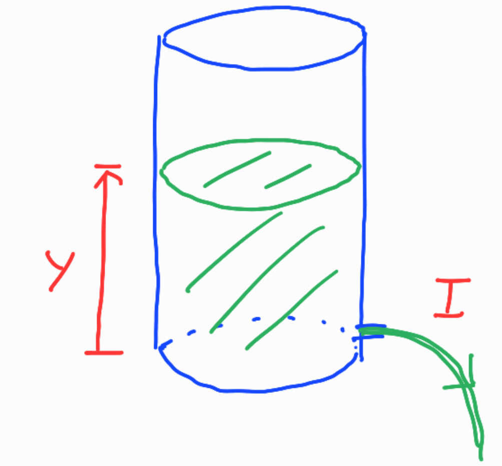
$\cdot dx, \; : f(y)$

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx$$

integrieren

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} g(u)\, du$$

Bsp.:



$$\dot{y}(t) = -b\sqrt{y(t)}$$

(ideale Flüssigkeit)

$t=0:\quad y(0) = y_0$

$t>0:\quad y(t) = ?$

spez. Lsg. $y(t)$ zum A.W. y_0 bei $t_0 = 0$:

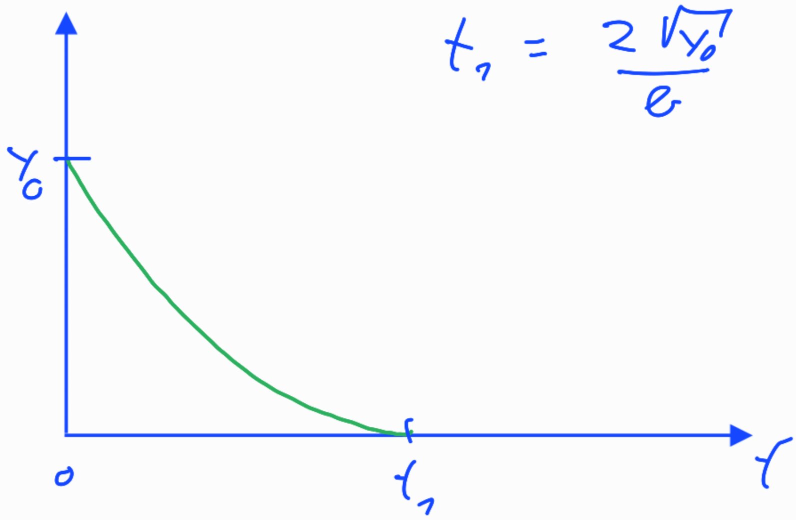
$$\frac{dy}{dt} = -b\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{y}}}_{2\sqrt{y}\,\big|_{y_0}^{y(t)}} = \underbrace{-\int_0^t b\,dt}_{-bt}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}\right) = -bt$$

$$\boxed{y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{b}{2}t\right)^2}$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{y_0}}{b}$$



5) numerische Lösung per Euler-Verfahren

DGL: $$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\parallel \quad h \to 0$$

$$\frac{1}{h}\left(y(x+h) - y(x)\right)$$

für h hinreichend klein:

$$(*) \qquad \boxed{y(x+h) = y(x) + h\, f(y(x), x)}$$

Euler: ermittle Lösung $y(x_0)$, $y(x_0+h)$, $y(x_0+2h)$, $y(x_0+3h)$, ...

per Iteration von $(*)$:

$$\boxed{y(x_0) = y_0}$$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h\, f(y(x_0), x_0)$$

$$y(x_0+2h) = y(x_0+h) + h\, f(y(x_0+h), x_0+h)$$

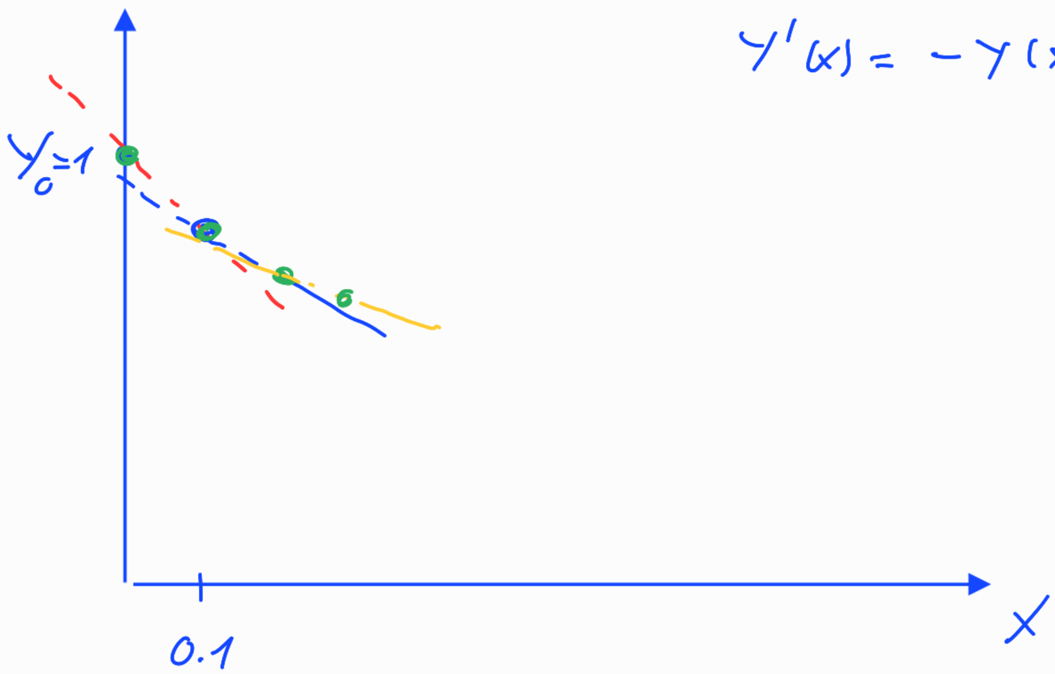
$$\vdots$$

$$\boxed{y(x_0+(n+1)h) = y(x_0+nh) + h\, f(y(x_0+nh), x_0+nh)}$$

Bsp.: $\boxed{y' = -y}$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$,

wähle $h = 0.1$

	exakt: $y(x) = e^{-x}$
$y(0) \approx 1$	1
$y(0.1) = y(0) - h\, y(0)$	
$= 1 - 0.1 \cdot 1 = 0.9$	0.90
$y(0.2) = 0.9 - 0.09 = 0.81$	0.82
$y(0.3) = 0.81 - 0.08 = 0.73$	0.74
$y(0.4) = 0.73 - 0.07 = 0{,}66$	0.67
$y(0.5) = 0{,}66 - 0.07 = 0{,}59$	0.60



$y'(x) = -y(x)$

Algorithmus (= Handlungsanweisung, Rezept, ...)

Al-Chwarizimi ~ 800

Für Euler-Iteration:

$x = x_0$

$y = y_0$

Def.: $f(y,x) = -y$

wähle $h = 0.1$

wiederhole solange $x < x_1$

$x \to x + h$

$y \to y + h\, f(y,x)$

schreibe x, y

$\to$ Resultat: Liste: $x_0 \,,\; y(x_0)$

$x_1 = x_0 + h \,,\; y(x_1)$

$x_2 = x_0 + 2h \,,\; y(x_2)$

$\vdots$