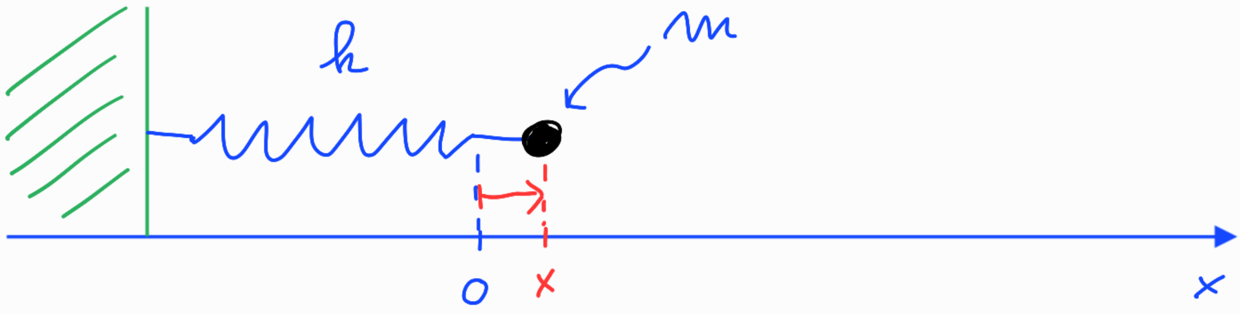
DGLen 2. Ordnung am Beispiel des harmonischen Oszillators (mit Dämpfung)



Federkraft: $F(x) = -k\,x$: Federkonstante

Dim.: $\frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$

$= \text{Masse}\cdot\text{Freq.}^2$

Reibungskraft: $F(\dot{x}) = -\gamma m \dot{x}$:

Dämpfungskonst.

$0 < \gamma$, Dim.: $\frac{1}{\text{Zeit}} = \text{Freq.}$

Newton:

$$m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) - \gamma m \dot{x}(t)$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0}$$

Bewegungsgl. eines ged. harmon. Osz. $\hat{=}$

DGL 2. Ordnung (linear, homogen, konst. Koeff.)

harm. Osz. = Modellsystem:

für kleine Schwingungen um

eine stabile Gleichgewichtslage

(Mechanik, Elektrotechnik, E.D., Moleküle, ...
↓ Schwingkreis, QM)

<u>Anfangswert-Problem:</u>

finde Bahn $x(t)$ (= Lsg. der DGL)

zu Anfangsort x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 bei Anfangszeit t_0

→ bestimme Fkt. $x(t)$ derart, dass

(i) $\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + k/m \, x(t) \overset{!}{=} 0$ für alle t

(ii) $x(t_0) \overset{!}{=} x_0$

(iii) $\dot{x}(t_0) \overset{!}{=} v_0$

Bestimmung von $x(t)$ mittels Exponential-

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

Zuerst: Fall $\gamma = 0$, keine Dämpfung

$$\rightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\, x(t)$$

Lsgen? $\quad x(t) = \sin(\omega t)$

$$\dot{x}(t) = \omega \cos(\omega t), \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 \overbrace{\sin(\omega t)}^{x(t)}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t),$$

Lsg. wenn $\omega^2 = k/m$

d.h. $x_1(x) = \underline{a} \sin(\omega_0 t)$ mit

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ist Lsg. der DGL.

weitere Lsg.:

$$x_2(x) = \underline{b} \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{b}{m}\sin t$$

$$\dot{x}(t) = \frac{b}{m}\cos t$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{b}{m}\sin t \;\cancel{\overset{?}{=}}\; -\frac{b}{m}\, x(t) = -\frac{b}{m}\,\frac{b}{m}\sin t$$

$$\cancel{\overset{?}{=}} -\left(\frac{b}{m}\right)^2 \sin t$$

$$x(t) = -e^{-\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = \omega e^{-\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 e^{-\omega t} \;\cancel{\overset{?}{=}}\; -\frac{b}{m}\left(-e^{-\omega t}\right)$$

$$\cancel{=} + \frac{b}{m} e^{-\omega t}$$

$\rightarrow$ allg. Lsg:

$$\boxed{x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)}$$

$$\left(= c\cos(\omega_0 t + \varphi)\right)$$

$t_0 = 0$: x_0, v_0:

$$x(0) = b \overset{!}{=} x_0$$

$$\dot{x}(0) = a\,\omega_0 \overset{!}{=} v_0$$

$$\rightarrow \quad x_{x_0,v_0}(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \quad ✓$$

allg. Fall: $\gamma \geq 0$. $\sqrt{k/m} = \omega_0$

$\rightarrow$ $$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x \overset{!}{=} 0}$$

bestimme Lsgen mittels Exponential-Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} \qquad \lambda = ?$$

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

in DGL einsetzen

$\rightarrow$: $$(\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2)\, \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$$

Lsgen $\lambda_{1/2}$ von

$$\boxed{\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0}$$

ergeben Lsgen

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad !$$

$\rightarrow$ allg. Lsg. $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Best. der Lsgen λ_1, λ_2:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$(\lambda + \gamma/2)^2 = \gamma^2/4 - \omega_0^2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda_{1/2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}}$$

<u>Fallunterscheidung:</u>

a) $\gamma = 0$ (keine Dämpfung)

b) schwache Dämpfung: $\gamma/2 < \omega_0$

c) starke Dämpfung: $\gamma/2 > \omega_0$

d) Grenzfall: $\gamma/2 = \omega_0$

Fall a): $\underline{\underline{\gamma = 0}}$: $\underline{\underline{\lambda_{1/2}}} = \pm\sqrt{-\omega_0^2}$

$$= \pm\sqrt{(-1)\,\omega_0^2}$$

$$= \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{= i}\,\omega_0 = \underline{\underline{\pm i\,\omega_0}}$$

$\rightarrow$ kompl. Lsgen: $x_{1/2}(t) = e^{\pm i\omega_0 t}$?

<u>Physik</u>: <u>reelle</u> Lsgen ! ?

⌈ Euler-Id.: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

d.h. $\mathrm{Re}\, e^{i\varphi} = \cos\varphi$, $\mathrm{Im}\, e^{i\varphi} = \sin\varphi$ ⌋

Bel.:
$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{X}_{I}(t) &= \mathrm{Re}\, e^{i\omega_0 t} \quad (= \cos\omega_0 t) \\ \tilde{X}_{II}(t) &= \mathrm{Im}\, e^{i\omega_0 t} \quad (= \sin\omega_0 t) \end{aligned}}$$

sind ebenfalls Lsgen der DGL! $\quad$ x_1 Lsg!

$$\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \overset{!}{=} 0$$

$$\hookrightarrow \mathrm{Re}\,(\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) = 0$$

$$\hookrightarrow \mathrm{Re}\,\ddot{x}_1 + \gamma\, \mathrm{Re}\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\, \mathrm{Re}\, x_1 = 0$$

$$\hookrightarrow \underbrace{(\mathrm{Re}\, x_1)^{\cdot\cdot}}_{\tilde{x}} + \gamma \underbrace{(\mathrm{Re}\, x_1)^{\cdot}}_{= \tilde{x}} + \omega_0^2 \underbrace{(\mathrm{Re}\, x_1)}_{\tilde{x}} \overset{!}{=} 0$$

$\longrightarrow$ $\tilde{x} = \mathrm{Re}\, x_1$ auch Lsg!

mit $\tilde{x} = \mathrm{Im}\, x_1$ analog! ⌋

kompl. Lsg $\quad x_1(t) = e^{i\omega_0 t}$

$\rightarrow$ reelle Lsgen: $\begin{cases} \tilde{x}_I(t) = \mathrm{Re}\, e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \\ \tilde{x}_{II}(t) = \mathrm{Im}\, e^{i\omega_0 t} = \sin(\omega_0 t) \end{cases}$

allg. Lsg. $\quad x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t)$

(wie oben) ✓

Fall b) schwache Dämpfung: $0 < \gamma/2 < \omega_0$

$$\rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{\underbrace{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}_{<0}}$$

$$= -\gamma/2 \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{=i} \; \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}}_{=:\omega}$$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega}$$

mit $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} < \omega_0$
$\gamma \neq 0$

$\rightarrow$ kompl. Lsg $\quad x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(-\gamma/2 + i\omega)t}$

→ kompl. Lsg $\quad x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(-\gamma/2 + i\omega)t}$

d.h. $\quad x_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i\omega t}$

→ reelle Lsge:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{x}_{I}(t) &= e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t) \\ \tilde{x}_{II}(t) &= e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin(\omega t) \end{aligned}}$$

$(\mathrm{Re}\, x_1)$

$(\mathrm{Im}\, x_1)$

↪ allg. Lsg:

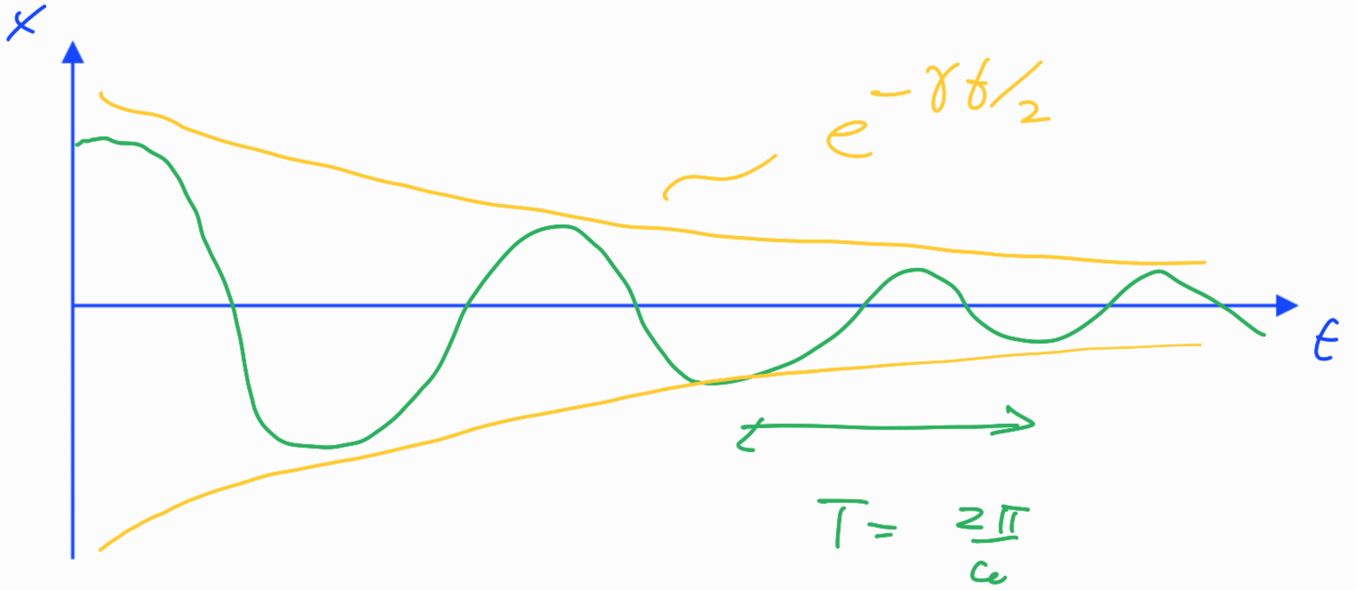
$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \right\}}$$

exponentielle Dämpf. der Amplitude

reduzierte Schwingfreq.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} < \omega_0$$

→



Fall c) Starke Dämpfung: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}_{>0}} \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow \quad \lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$\rightarrow$ reelle Lsgen: $x_1(t) = e^{-|\lambda_1| t}$

$x_2(t) = e^{-|\lambda_2| t}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 e^{-|\lambda_2| t}}$$

exponentiell abfallende Lsgen.: