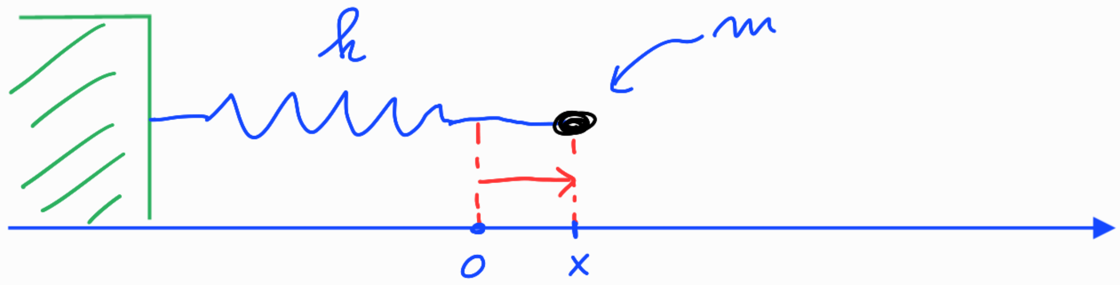
Letzte Woche: Harmon. Oszill. mit Dämpfung



- Federkraft: $F(x) = -kx$
- Reibungskraft: $F_r(\dot{x}) = -\gamma m \dot{x}$

$\Rightarrow$ Newt. Bwgsgl.: $$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (*)$$

DGL 2. Ordnung, linear, homogen

$(\omega_0 = \sqrt{k/m})$

Lösungen mittels Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Lsg. der DGL (*) $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0}$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\gamma/2 \pm \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}}$$

Fallunterscheidung

- schwache Dämpfung: $\gamma/2 < \omega_0$

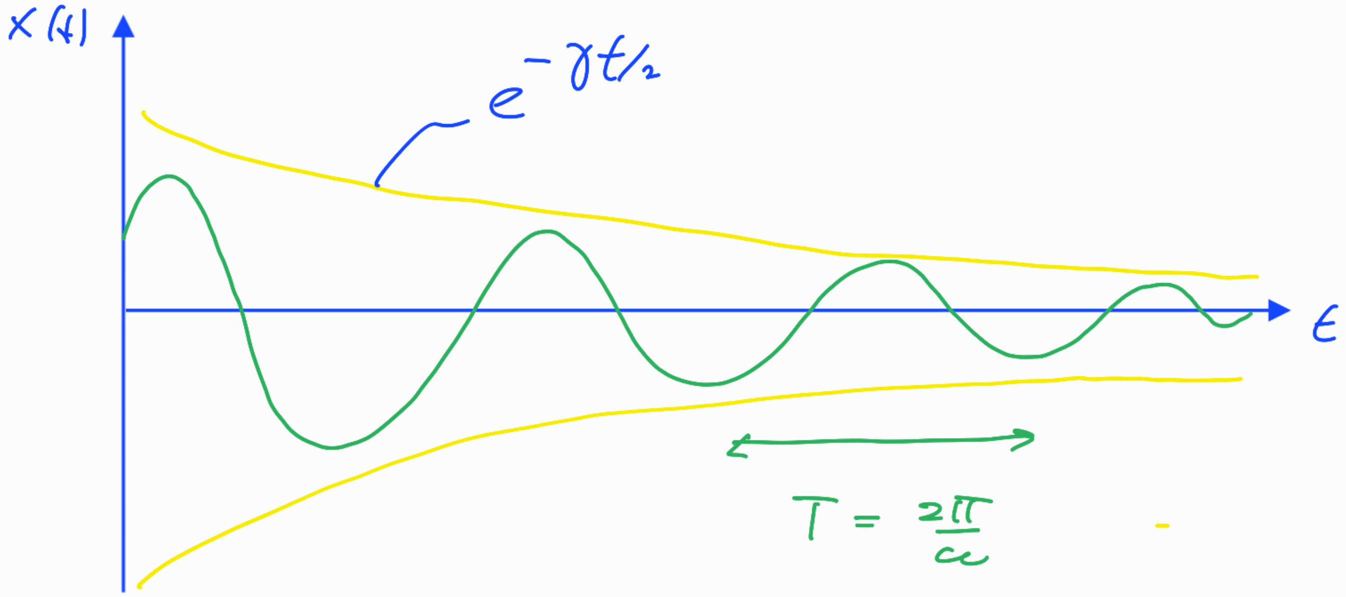
$$\rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\,\omega, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$\rightarrow$ reelle Lsgen

$$\tilde{x}_I(t) = \mathrm{Re}\, e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t/2} \cos \omega t$$

$$\hat{x}_{II}(t) = \mathrm{Im}\, e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t/2} \sin \omega t$$

$\rightarrow$ allg. Lsg.: $x(t) = e^{-\gamma t/2}\,(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$

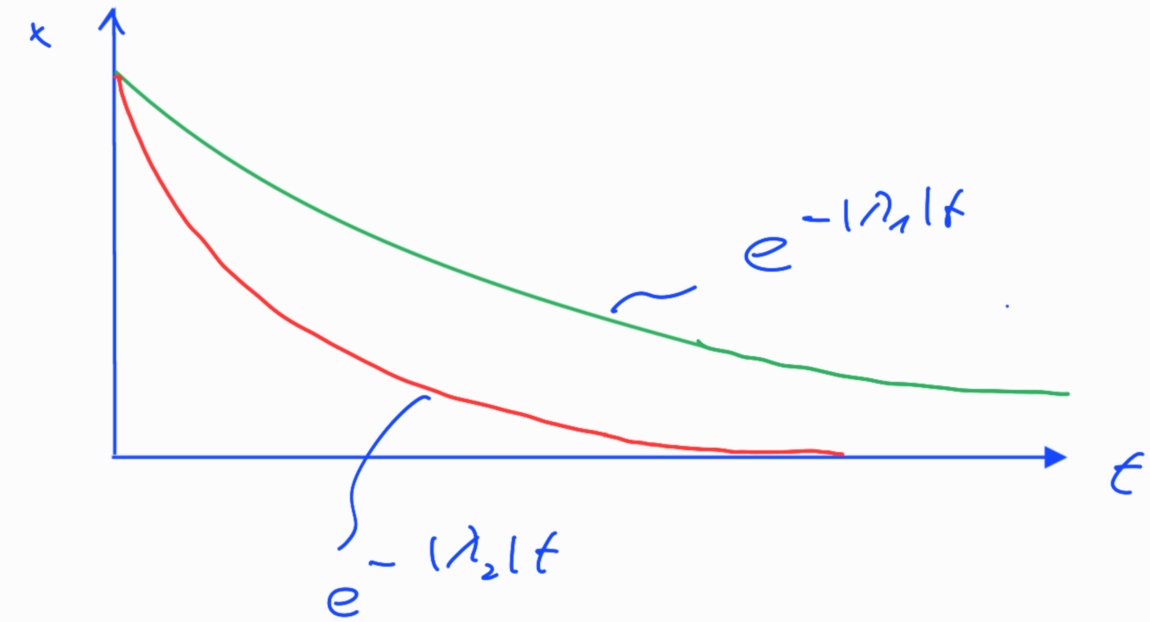


- **starke Dämpfung:** $\gamma/2 > \omega_0$

$$\rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \qquad \underline{\underline{\text{reell}}}$$

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$$\rightarrow \quad x(t) = c_1\, e^{-|\lambda_1| t} + c_2\, e^{-|\lambda_2| t}$$



- **Grenzfall:** $\underline{\gamma/2 \overset{!}{=} \omega_0}$

- $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma/2$

$$\rightarrow \quad x_1(t) = x_2(t) = e^{-\gamma t/2}$$

2. unabhängige Lösung? $\longrightarrow$

zweite Lsg. $x_{II}(t)$ unabhängig

von $x_I(t) = e^{-\gamma t/2}$?

betrachte $\gamma/2 < \omega_0$, aber $\boxed{\omega_0 - \gamma/2 \to 0 \, !}$

$\to \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} \to 0$

$$x_I(t) = e^{-\gamma t/2} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\simeq 1 - \cancel{\frac{1}{2}(\omega t)^2}} = e^{-\gamma t/2}$$

$$x_{II}(t) = e^{-\gamma t/2} \underbrace{\sin(\omega t)}_{\simeq \omega t - \cancel{\frac{(\omega t)^3}{6}}} = \omega t e^{-\gamma t/2}$$

Bel.: $x_{II} = t e^{-\gamma t/2}$ ebenfalls Lsg

der DGL: $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\gamma^2}{4} x = 0$! ✓

- $\frac{\gamma^2}{4} x = \cancel{\frac{\gamma^2}{4}} t e^{-\gamma t/2}$

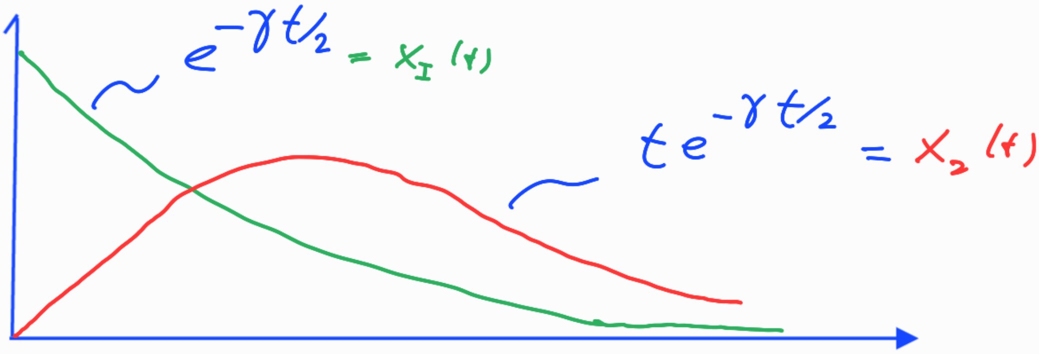
- $\gamma \dot{x} = \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2} t\right) e^{-\gamma t/2} = \left(\cancel{\gamma} - \cancel{\frac{\gamma^2}{2}} t\right) e^{-\gamma t/2}$

$+ \cdot \quad \ddot{x} = \left(\cancel{-\frac{\gamma}{2}} - \cancel{\frac{\gamma}{2}} + \cancel{\frac{\gamma^2}{4}} t\right) e^{-\gamma t/2}$

0 ✓

→ allg. Lsg im Grenzfall: $\gamma/2 = \omega_0$

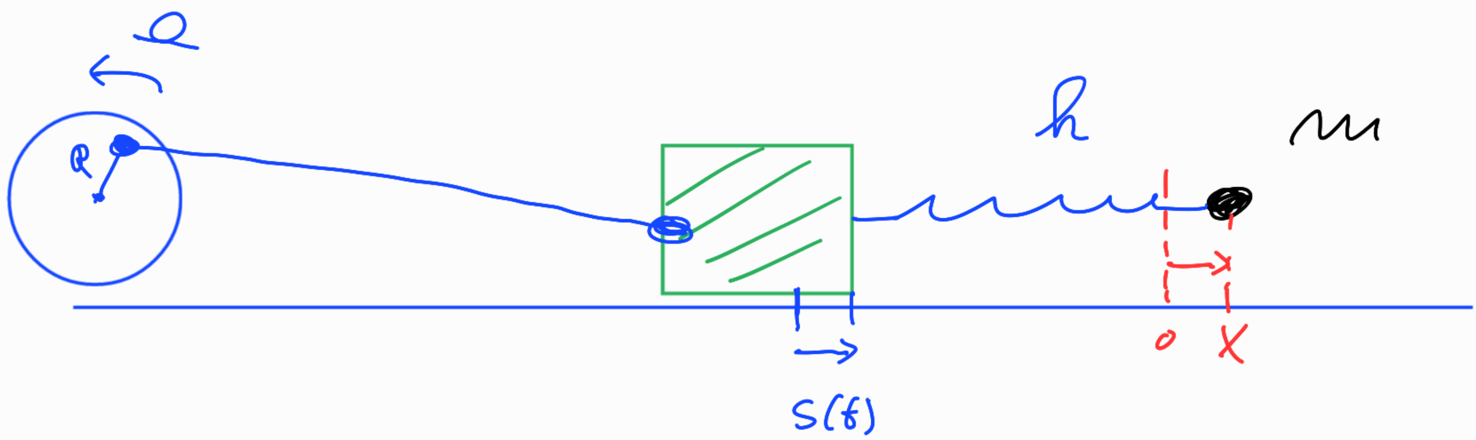
$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\,(c_1 + c_2 t)$$



Harmonischer Oszillator mit Dämpfung und periodischer externer Kraft, Resonanz

Response-Funktion

$$\boxed{F_{ex}(t) = \underbrace{F_0}_{\text{Stärke}} \cos(\underbrace{\Omega}_{\text{externe Frequenz}} t)}$$



$$s(t) = R\cos(\Omega t)$$

→ Federkraft $F(x, s(t)) = -k(x - s(t))$

→ $F(x,t) = -kx + \underbrace{k R \cos \Omega t}$

$F_{ex}(t) = F_0 \cos \Omega t$

$F_0 = k R$

⇒ Newt. Bewegungsgl.:

$$m \ddot{x} = -kx - \gamma m \dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t} \qquad (*)$$

$f_0 = F_0 / m$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

DGL 2. Ordnung,

linear, inhomogen

allg. Lösung der DGL (*):

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t)$$!

allgemeine Lsg der homogenen DGL: $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

spezielle Lsg der inhomogen DGL (*)

Problem: finde spezielle Lsg. der DGL (*) !
$\quad$ 2 $x_s(t)$

2 Ideen:

1) rechne komplex !

$$x_s(t) \overset{!}{=} \mathrm{Re}\, z_s(t)$$

mit $z_s(t)$ spezielle (kompl.) Lsg. der

komplexen DGL

$$(**) \quad \boxed{\ddot z + \gamma \dot z + \omega_0^2 z = f_0\, e^{i\Omega t}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Re}} \quad \ddot x_s + \gamma \dot x_s + \omega_0^2 x_s = f_0 \underbrace{\mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}}_{\cos \Omega t}$$

(2) Ansatz für $z_s(t)$?

↳ erzwungen Schwingung !

- Frequenz: Ω
- Amplitude: $|a|$
- Phasenverschiebung φ

$$\longrightarrow \boxed{z_s(t) = a\, e^{i\Omega t}}$$

$$z_s(t) = |a|\, e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

$$\downarrow \mathrm{Re}$$

$$x_s(t) = |a| \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\mathbb{C} \ni a = |a|\, e^{i\varphi}$$

$\circ \quad z(t) = a\, e^{i\Omega t}$

$\circ \quad \dot{z}(t) = i\Omega\, a\, e^{i\Omega t}$

$\circ \quad \ddot{z}(t) = -\Omega^2\, a\, e^{i\Omega t}$

$\Rightarrow$ in DGL (**):

$$(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2)\, \underline{\underline{a}} \overset{!}{=} f_0$$

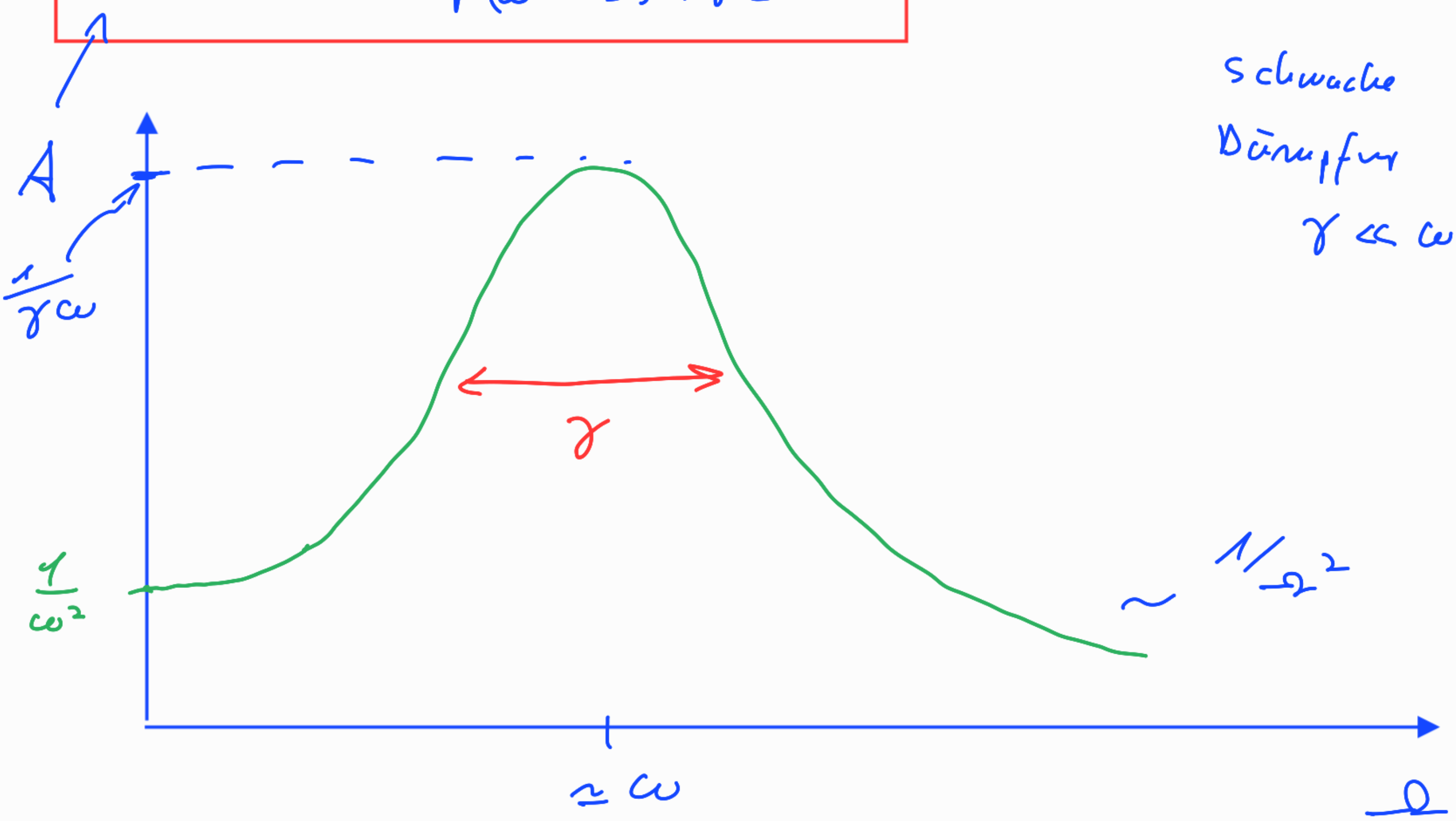
$$\Rightarrow \quad a = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} \qquad (\omega \equiv \omega_0)$$

$$\Rightarrow \quad |a| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

<u>Response-Funktion</u>: $\quad A_{\omega,\gamma}(\Omega) = \dfrac{|a|}{f_0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{\omega,\gamma}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}}$$

$$\boxed{A_{\omega,\gamma}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}}$$



schwache Dämpfung

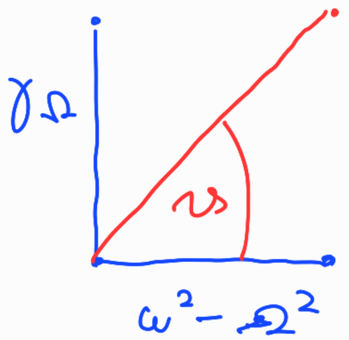
$\gamma \ll \omega$

$$\frac{a}{f_0} = \frac{1}{\omega^2-\Omega^2+i\gamma\Omega}$$

<u>Phasenverschiebung</u>:

$$\vartheta = -\varphi = -\arg a/f_0$$

$$= \arg\left(\omega^2-\Omega^2+i\gamma\Omega\right)$$

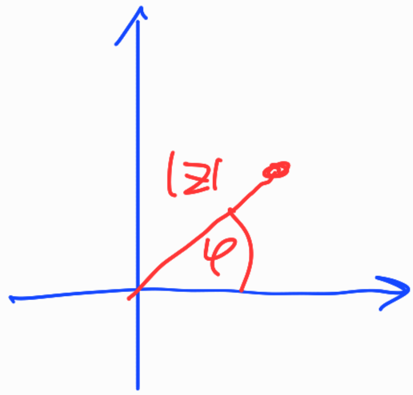


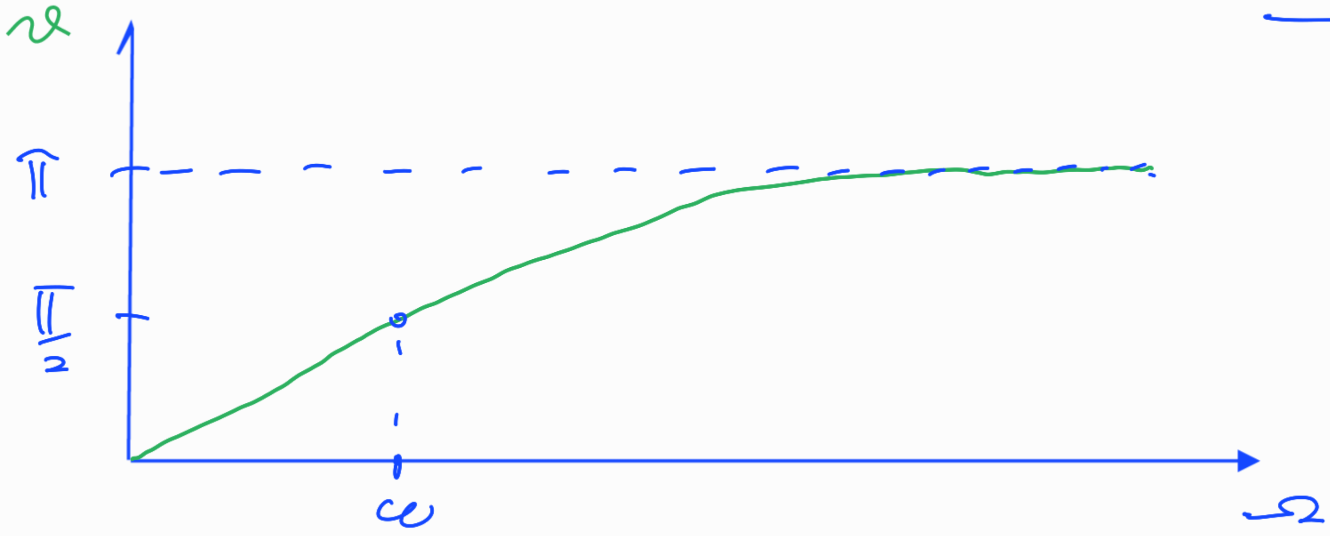
$$\tan\vartheta = \frac{\gamma\Omega}{\omega^2-\Omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta = \arctan\left(\gamma\Omega/_{\omega^2-\Omega^2}\right)$$

$$z = |z| \, e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \arg z = \varphi$$





Eigenschwingungen eines mech. System

mit $n \geq 1$ Freiheitsgraden

Eigenmoden $\longleftrightarrow$ Eigenvektoren

Eigenfrequenzen $\quad$ Eigenwerten

einer Matrix