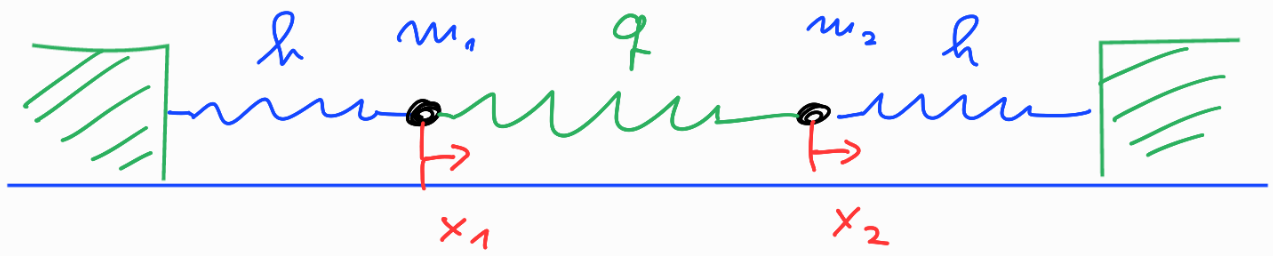
Thema: Eigenschwingungen, Eigenfrequenzen

$\rightsquigarrow$ Eigenvektoren, Eigenwerte

am Bsp. gekoppelter harm. Oszillatoren:

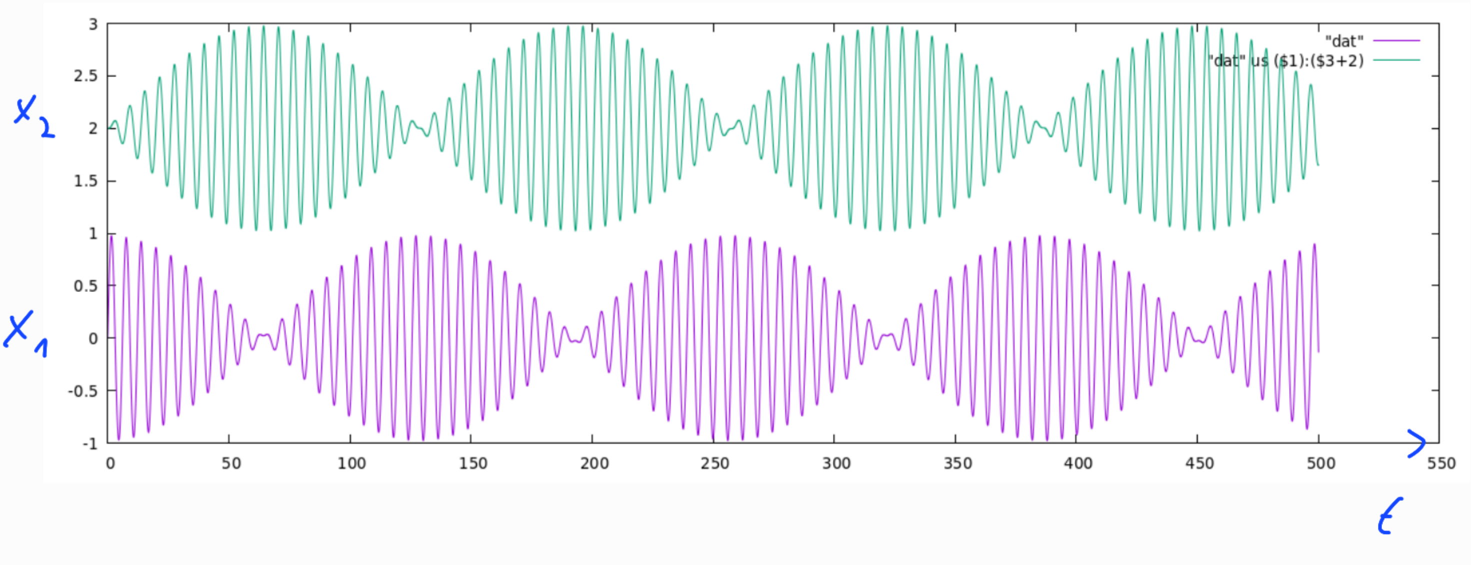
a)



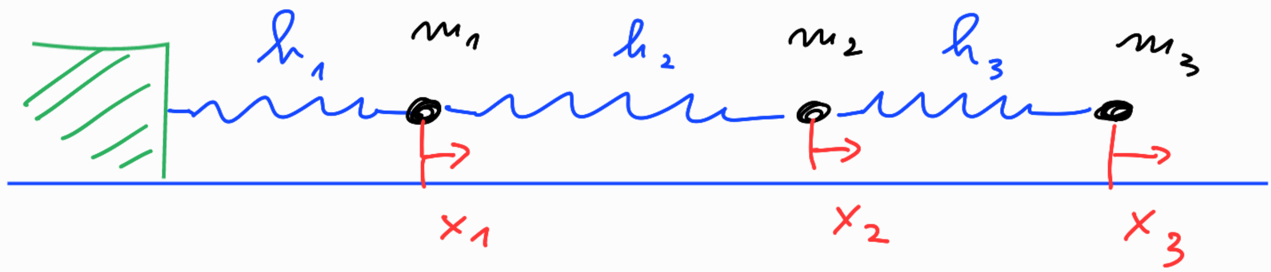
$\rightarrow$ Lineares DGL-System für $x_1(t)$, $x_2(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -\frac{k+q}{m_1}\,x_1 + \frac{q}{m_1}\,x_2 \\ \ddot{x}_2(t) &= \frac{q}{m_2}\,x_1 - \frac{k+q}{m_2}\,x_2 \end{aligned}}$$

numerische Lsg: (Euler-Iteration)

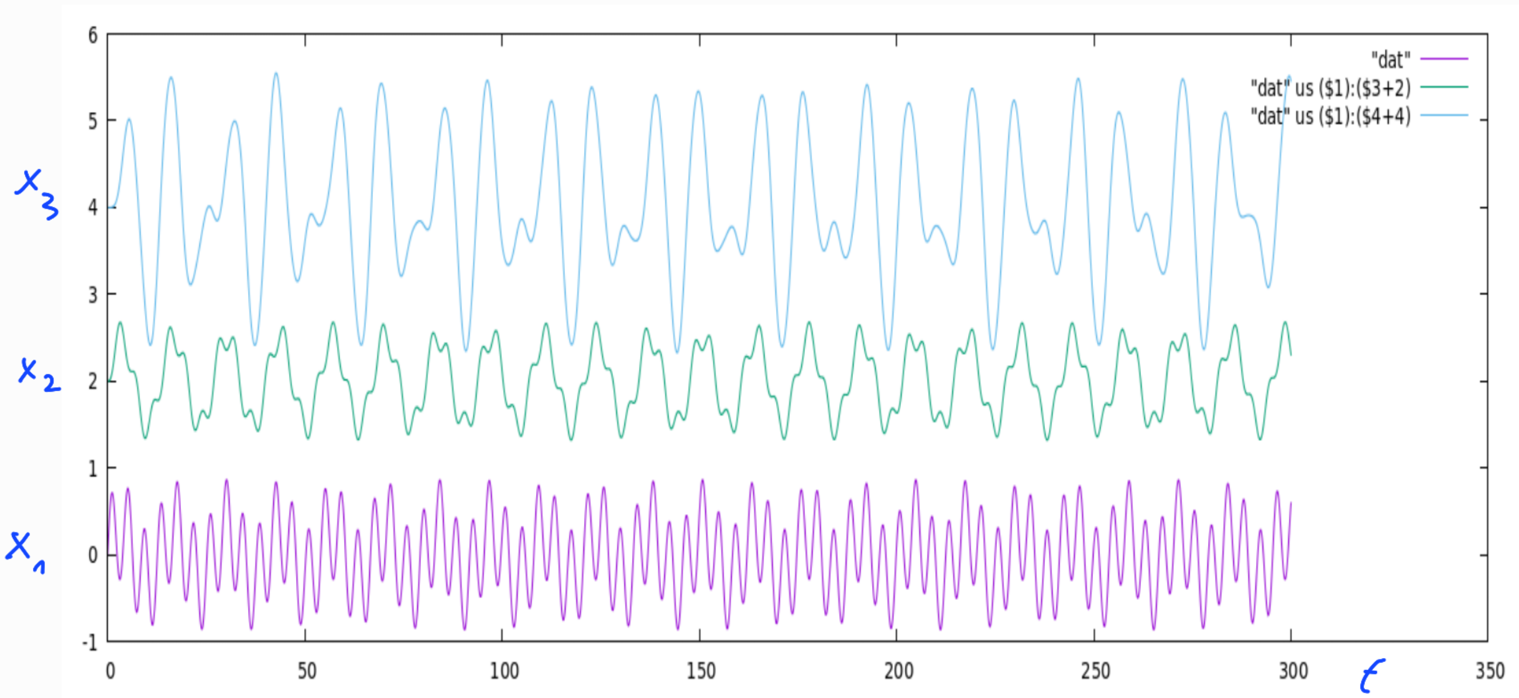


b)



$$\boxed{\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\
\ddot{x}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_2 + \frac{k_3}{m_2}x_3 \\
\ddot{x}_3 &= \frac{k_3}{m_3}x_2 - \frac{k_3}{m_3}x_3
\end{aligned}}$$

numerische Lsg.:



$$(m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3, \quad k_i = 1)$$

analytische Lsg:

Auslenkungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ genügt

DGL:

$$(*) \quad \boxed{\ddot{\vec{x}} = -K\,\vec{x}}$$

(ähnlich $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ ⤳ $x(t) = \underline{\underline{a}}\, e^{i\underline{\underline{\omega}} t}$)

„Hooksche Matrix"

$$\boxed{K = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+q & -q \\ -q & k+q \end{pmatrix}}$$

($m_1 = m_2 = m$)

spez. Lsgen mittels Exponentialansatz:

$$\boxed{\vec{x}(t) = \underline{\underline{\vec{u}}}\, e^{i\underline{\underline{\omega}} t}}$$

$\vec{u}$: Vektor (!)

ω : Frequenz

genau dann Lsg. der DGL (*) wenn

$$\boxed{K\vec{u} \overset{!}{=} \lambda\vec{u}} \qquad \lambda^2 = \omega$$

zu lösendes Problem:

$$\boxed{\text{bestimme Vektor } \vec{u} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \text{ so, dass } \quad K\vec{u} = \lambda \vec{u}}$$

"Eigenwert-Problem"

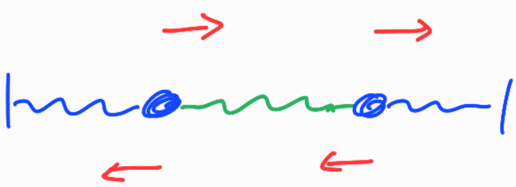
$\vec{u}$: Eigenvektor

λ : Eigenwert

(s.u.)

Lösungen (mittels phys. Einsicht)

(I) gleichphasige Schwingung:



d.h. $\vec{u}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\leadsto \quad K\vec{u}_I = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+q & -q \\ -q & k+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

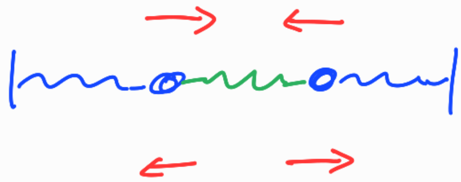
$$= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\,\vec{u}_I \quad \checkmark$$

"$\vec{u}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor der Matrix K mit Eigenwert $\lambda_I = k/m$"

$\rightarrow$ Schwingungsfrequenz $\omega_I = \sqrt{k/m}$ $\longrightarrow$

spez. Lösg. $\vec{x}_I(t) = \vec{u}_I \, e^{i\omega_I t}$

(II) <u>gegenphasige Schwingung</u>:



d.h. $\vec{u}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad K \vec{u}_{II} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k+q & -q \\ -q & k+q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k+2q \\ -k-2q \end{pmatrix} = \frac{k+2q}{m} \, \vec{u}_{II}$$

d.h. $\vec{u}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor der Matrix K

zum Eigenwert $\lambda_{II} = \dfrac{k+2q}{m}$

$\rightsquigarrow$ Schwingungsfrequenz $\omega_{II} = \sqrt{\dfrac{k+2q}{m}}$

spez. Lsg. $\vec{x}_{II}(t) = \vec{u}_{II} \, e^{i\omega_{II} t}$

$\rightsquigarrow$ spez. <u>reelle</u> Lsgen:

$$\vec{x}_{I,1} = \vec{u}_I \cos \omega_I t$$
$$\vec{x}_{I,2} = \vec{u}_I \sin \omega_I t$$
$$\vec{x}_{II,1} = \vec{u}_{II} \cos \omega_{II} t$$
$$\vec{x}_{II,2} = \vec{u}_{II} \sin \omega_{II} t$$

$\rightsquigarrow$ allg. reelle Lsg.:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x}(t) = \ &\vec{u}_I \left(c_{I1} \cos \omega_I t + c_{I2} \sin \omega_I t \right) \\ &+ \vec{u}_{II} \left(c_{II1} \cos \omega_{II} t + c_{II2} \sin \omega_{II} t \right)\end{aligned}}$$

$$\vec{u}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_I = \sqrt{\lambda_I} = \sqrt{k/m}$$

$$\vec{u}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \omega_{II} = \sqrt{\lambda_{II}} = \sqrt{\frac{k+2q}{m}}$$

$\hookrightarrow$ Lösung für Anfangsorte $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und Anf. geschw. $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ bei $t=0$:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(\vec{u}_I + \vec{u}_{II}) = \vec{x}(0) \rightsquigarrow c_{I1} = c_{II1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = \vec{u}_I \, \omega_I \, c_{I2} + \vec{u}_{II} \, \omega_{II} \, c_{II,2} \stackrel{!}{=} \vec{v}_0 = \vec{0}$$

$$\rightsquigarrow \quad c_{I,2} = c_{II,2} = 0 \quad \checkmark$$

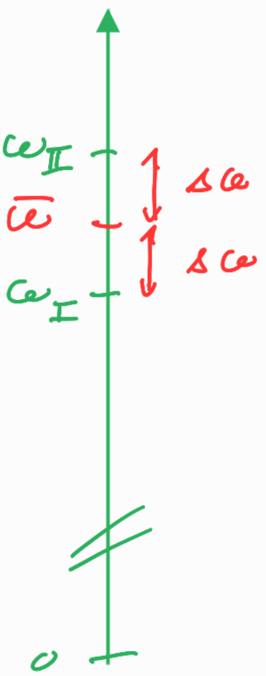
$$\rightarrow \vec{x}(t) = \frac{1}{2}\left(\vec{u}_I \cos \omega_I t + \vec{u}_{II} \cos \omega_2 t \right)$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}_I \cos\omega_I t + \vec{u}_{II}\cos\omega_{II} t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\omega_I t) + \cos(\omega_{II} t) \\ \cos(\omega_I t) - \cos(\omega_{II} t) \end{pmatrix}$$

"Schwebung" für $q \underline{\ll} k$?

$$\Rightarrow \quad \omega_I = \sqrt{k/m} \approx \omega_{II} = \sqrt{k/m + \frac{2q}{m}}$$



mittl. Freq $\quad \bar\omega := \dfrac{\omega_I + \omega_{II}}{2}$

Differenz $\quad \Delta\omega := \dfrac{\omega_{II} - \omega_I}{2}$

$$\cos(\omega_I t) = \cos(\bar\omega t - \Delta\omega t)$$

$$= \cos(\bar\omega t)\cos\Delta\omega t + \sin(\bar\omega t)\sin\Delta\omega t$$

$$\cos(\omega_{II} t) = \cos(\bar\omega t + \Delta\omega t)$$

$$= \cos(\bar\omega t)\cos\Delta\omega t - \sin(\bar\omega t)\sin\Delta\omega t$$

$$\rightarrow \quad \vec{x}(t) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\bar\omega t \cdot \cos(\Delta\omega t) \\ \sin\bar\omega t \cdot \sin(\Delta\omega t) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Schwebung mit Frequenz

$$\boxed{\omega_S := \Delta\omega} = \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} \underset{\uparrow}{\simeq} \bar{\omega}\,\frac{q}{h} \ll \bar{\omega}$$

$$\left(T_S = \frac{2\pi}{\omega_S} = \bar{T} \cdot \frac{h}{q} \right)$$

<u>Fazit</u>:

Eigenvektoren $(\vec{u}_I, \vec{u}_{II})$ und Eigenwerte $(\lambda_I, \lambda_{II})$ der K-Matrix $\Longleftrightarrow$ Eigenmoden und deren Eigenfrequenzen der harm. Oszillatoren!

Def. a) λ ist Eigenwert einer $n \times n$ Matrix A zum Eigenvektor $\vec{u}$

$$:\Longleftrightarrow \quad A\vec{u} = \lambda\vec{u} \qquad (\vec{u} \neq \vec{0})$$

b) λ ist Eigenwert von A

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, \vec{u} \neq 0 : \quad A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

Bspe: a) • $\lambda_I = k/m$ ist Eigenwert der Matrix

$$K = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+q & -q \\ -q & k+q \end{pmatrix}$$ zum

Eigenvektor $\vec{u}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\lambda_{II} = \frac{k+2q}{m}$ ist EW von K zum

EV $\vec{u}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ Eigenwerte: d_1, d_2

Eigenvektoren: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} = d_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ✓

Problem: Bestimmung von EWen und EVen einer allg. Matrix!

$\Rightarrow$ benötigen dazu:

Determinante einer $n \times n$-Matrix

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n)$$

Spaltenvektoren der Matrix A

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Leibniz-Formel:

(1646–1716)

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\ell(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$\sigma: i \mapsto \sigma_i$$

$\boxed{\det A := \text{orientierte } n\text{-dimensionale Volumen des durch die Spaltenvektoren } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \text{ gegebenen } n\text{-Spats}}$

$\underline{n=1}$: $A = (a_{11})$

- 1-Spat : Strecke

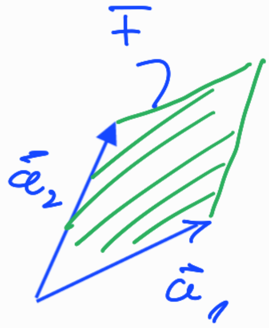
- 1-Volumen : Länge der Strecke

$\hookrightarrow$ $\det A = a_{11}$ ($\underline{\text{ohne}}$ Betrag

$= \underline{\text{orient.}}$ 1-Volumen)

$\underline{n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

- 2-Spat : Parallelogramm :



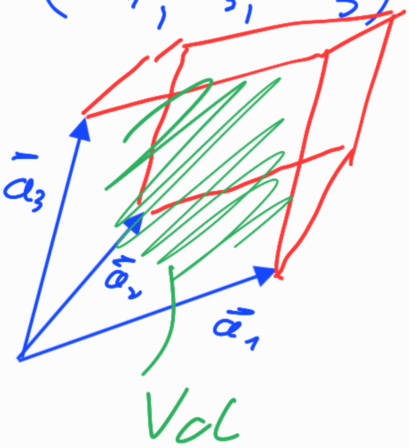
- 2-Vol. = Flächeninhalt

$$\leadsto \det A = F(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \right]_3 = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$n=3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & & \vdots \\ a_{31} & \dots & \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$



- 3-Spat:

- 3-Volumen = "Volumen"

$$\det A \overset{!}{=} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle = \dots$$

$n \geq 4$: später!

Wie hilft Determinante bei der Bestimmung von Eigenwerten/-vektoren einer Matrix K?

drei Feststellungen helfen weiter!

- $K\vec{u} \overset{!}{=} \lambda \vec{u} = \lambda \underset{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{I}} \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \quad K\vec{u} - \lambda I \vec{u} = \underbrace{(K - \lambda I)}_{=:A} \vec{u} \overset{!}{=} 0$$

λ EW von K $\overset{!}{\Longleftrightarrow}$ $\det(K - \lambda I) \overset{!}{=} 0$