(BA Physik GymGe/BK)

Mathematische Methoden:

"höhere" Mathematik fürs Physikstudium

Themen:

- Vektoren, Vektorraum
- Koordinatensysteme
- Analysis: Funktion, Ableitung, Integral in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$
- komplexe Zahlen
- Differenzialgleichungen
- Lineare Algebra: Lin. Abbildung, Determinante, Eigenwert, Eigenvektor
- Vektoranalysis: Differenzialoperatoren, Integralsätze von Gauß, Stokes

$+, -, \cdot, :$

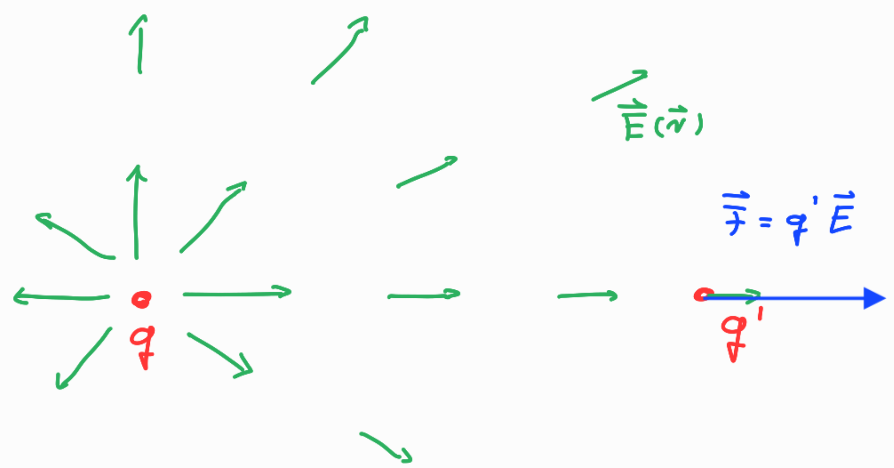
{ ginge es nicht auch mit "elementarer" Mathematik?

Im Prinzip schon, aber ...

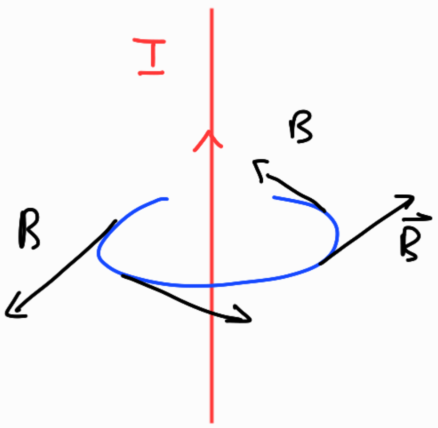
Beispiel: Elektrodynamik

Wie verhalten sich elektrische Ladungen, Ströme, elektrisches Feld und Magnetfeld?

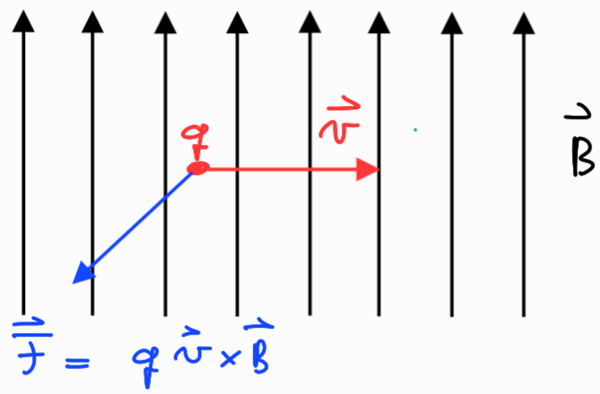
a)



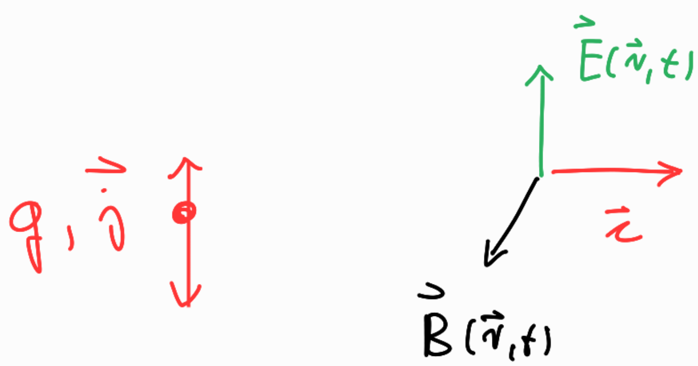
b)



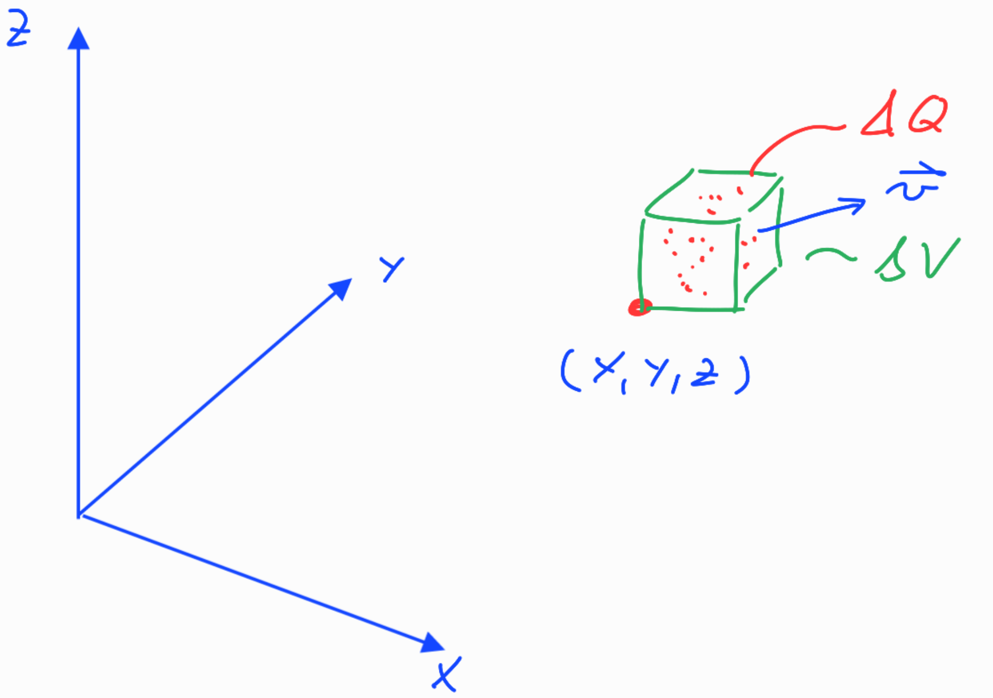
c)



d)



Faraday, Ampère, Gauß, Maxwell, Hertz, ... ⟶



Ladungsdichte: $\rho(x,y,z,t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$

Stromdichte: $\vec{j}(x,y,z,t) = \vec{v}\,\rho(x,y,z,t)$

elektrisches Feld: $\vec{E}(x,y,z,t)$

Magnetfeld: $\vec{B}(x,y,z,t)$

ρ, $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$,

$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$,

$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

genügen Maxwellschen Gleichungen:

in „elementarer" Mathematik:

$a \to 0$

$$\frac{1}{a}\Big\{ E_x(x+a, y, z, t) - E_x(x, y, z, t)$$
$$+ E_y(x, y+a, z, t) - E_y(x, y, z, t)$$
$$+ E_z(x, y, z+a, t) - E_z(x, y, z, t)\Big\} = \rho(x, y, z, t)$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ B_x(x+a, y, z, t) - B_x(x, y, z, t)$$
$$+ B_y(x, y+a, z, t) - B_y(x, y, z, t)$$
$$+ B_z(x, y, z+a, t) - B_z(x, y, z, t)\Big\} = 0$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ E_y(x, y, z+a, t) - E_z(x, y+a, z, t)$$
$$- E_y(x, y, z, t) + E_z(x, y, z, t)\Big\} = \frac{1}{\tau}\Big\{ B_x(x, y, z, t+\tau) - B_x(x, y, z, t)\Big\}$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ E_z(x+a, y, z, t) - E_x(x, y, z+a, t)$$
$$- E_z(x, y, z, t) + E_x(x, y, z, t)\Big\} = \frac{1}{\tau}\Big\{ B_y(x, y, z, t+\tau) - B_y(x, y, z, t)\Big\}$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ E_x(x, y+a, z, t) - E_y(x+a, y, z, t)$$
$$- E_x(x, y, z, t) + E_y(x, y, z, t)\Big\} = \frac{1}{\tau}\Big\{ B_z(x, y, z, t+\tau) - B_z(x, y, z, t)\Big\}$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ B_y(x,y,z+a,t) - B_z(x,y+a,z,t)$$
$$- B_y(x,y,z,t) + B_z(x,y,z,t) \Big\} = -\frac{1}{\tau}\Big\{ E_x(x,y,z,t+\tau) - E_x(x,y,z,t) \Big\}$$
$$+ \, j_x(x,y,z,t)$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ B_z(x+a,y,z,t) - B_x(x,y,z+a,t)$$
$$- B_z(x,y,z,t) + B_x(x,y,z,t) \Big\} = -\frac{1}{\tau}\Big\{ E_y(x,y,z,t+\tau) - E_y(x,y,z,t) \Big\}$$
$$+ \, j_y(x,y,z,t)$$

$$\frac{1}{a}\Big\{ B_x(x,y+a,z,t) - B_y(x+a,y,z,t)$$
$$- B_x(x,y,z,t) + B_y(x,y,z,t) \Big\} = -\frac{1}{\tau}\Big\{ B_z(x,y,z,t+\tau) - B_z(x,y,z,t) \Big\}$$
$$+ \, j_z(x,y,z,t)$$

$$f_x(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\Big\{ E_x(x,y,z,t) +$$
$$v_y(x,y,z,t)\; B_z(x,y,z,t) - v_z(x,y,z,t)\; B_y(x,y,z,t) \Big\}$$

$$f_y(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\Big\{ E_y(x,y,z,t) +$$
$$v_z(x,y,z,t)\; B_x(x,y,z,t) - v_x(x,y,z,t)\; B_z(x,y,z,t) \Big\}$$

$$f_z(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\Big\{ E_z(x,y,z,t) +$$
$$v_x(x,y,z,t)\; B_y(x,y,z,t) - v_x(x,y,z,t)\; B_y(x,y,z,t) \Big\}$$

i.d.R. gilt:

$$\text{"elementar"} \overset{!}{=} \text{"kompliziert"}$$

hier Vereinfachung durch:

partielle Ableitung

$$\partial_x f(x,y,z,t) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \left(f(x+a, y, z, t) - f(x,y,z,t) \right)$$

($\partial_y f$, $\partial_z f$, $\partial_t f$ analog)

Funktionsbegriff

$$f : (x,y,z,t) \mapsto f(x,y,z,t) \longrightarrow$$

- $\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \rho$

- $\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0$

- $\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\partial_t B_x$

  $\partial_z E_x - \partial_x E_z = -\partial_t B_y$

  $\partial_x E_y - \partial_y E_x = -\partial_t B_z$

- $\partial_y B_z - \partial_z B_y = +\partial_t E_x + j_x$

  $\partial_z B_x - \partial_x B_z = +\partial_t E_y + j_y$

  $\partial_x B_y - \partial_y B_x = +\partial_t E_z + j_z$

- $f_x = \rho \, (E_x + v_y B_z - v_z B_y)$

  $f_y = \rho \, (E_y + v_z B_x - v_x B_y)$

  $f_z = \rho \, (E_z + v_x B_y - v_y B_x)$

mit Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

und Differenzialoperatoren

$$\operatorname{div} \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$$

Divergenz $\equiv$ Quellstärke

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Rotation $=$ Wirbelstärke

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{f} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \end{aligned}}$$

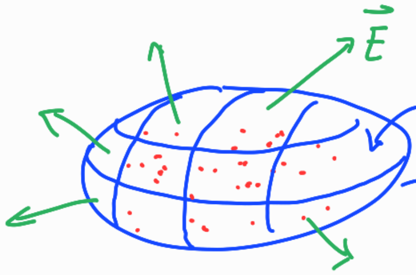
Maxwellsche Gleichungen

+

Lorentzkraft

Umformung mittels Integralsätze von Stokes/Gauß:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\int_A \vec{E}\, d\vec{f} = Q_V}$$



Volumen V

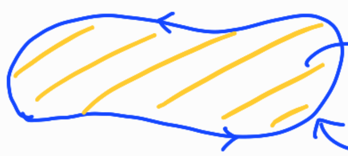
Oberfläche A

Q_V = im V enthaltene Gesamtladung

$\int_A \vec{E}\, d\vec{f}$ = elektrischer Fluss durch A

„elekt. Ladungen sind Quellen des elekt. Felds"

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t B \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\int_\ell \vec{E}\, d\vec{f} = -\partial_t \Phi_A}$$



Fläche A

Rand ℓ

Φ_A : magnetischer Fluss durch A

$\int_\ell \vec{E}\, d\vec{f}$: Ringspannung d.h.

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\partial_t B \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\ell} \vec{E}\,d\vec{\ell} = -\partial_t \phi_A$$

$\Leftrightarrow$ „zeitlich veränderlicher mag. Fluss induziert Ringspannung"

Maxwellsche Gleichungen im <u>Vakuum</u>:

$\Rightarrow \rho = 0, \; \vec{j} = 0$

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{E} = 0, & \text{rot}\,\vec{E} = -\partial_t B \\ \text{div}\,\vec{B} = 0, & \text{rot}\,\vec{B} = +\partial_t E \end{cases}$$

<u>Maxwell</u>

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ genügen <u>Wellengleichung</u>:

$$\boxed{\partial_t^2 \vec{E} = c^2 \Delta \vec{E}, \quad \partial_t^2 \vec{B} = c^2 \Delta \vec{B}}$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

$\rightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden im Vakuum eine <u>elektromagnetische Welle</u>, die sich mit

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3{,}00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ausbreitet: "Licht"

Fazit: **Mathematik**

(1) macht alles sehr viel leichter

(2) ermöglicht physikalische Einsichten

→ (3) ist die Sprache der Physik

?!

Vokabeln ↔ Definitionen (zuhause lernen!)

↓ ↓

einfache Lese- und Schreibübungen ↔ wöchentliche Übungsaufgaben

↓ ↓

Literatur lesen u. verstehen ↔ physikalische Theorien lernen und verstehen

⚠ Physik ≠ Mathematik !

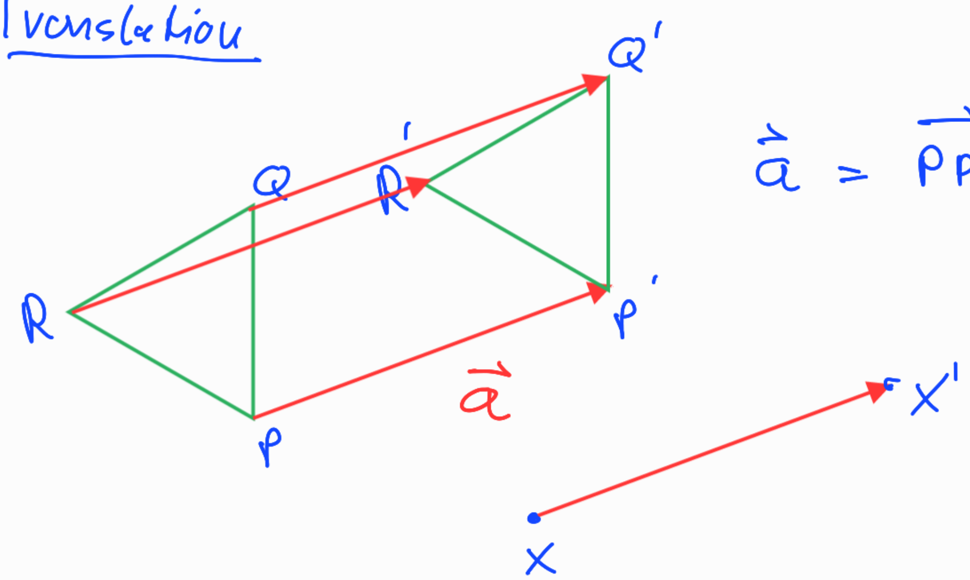
Vektoren und Vektorräume

hier: Translationen (Parallelverschiebungen)

als Prototyp von allg. Vektoren

anschaulich — abstrakt!

Translation

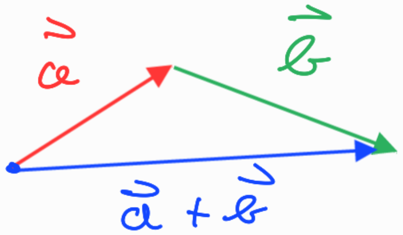


$\vec{a} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{RR'}$

$= \overrightarrow{XX'}$

Hintereinanderausführung (Verkettung)

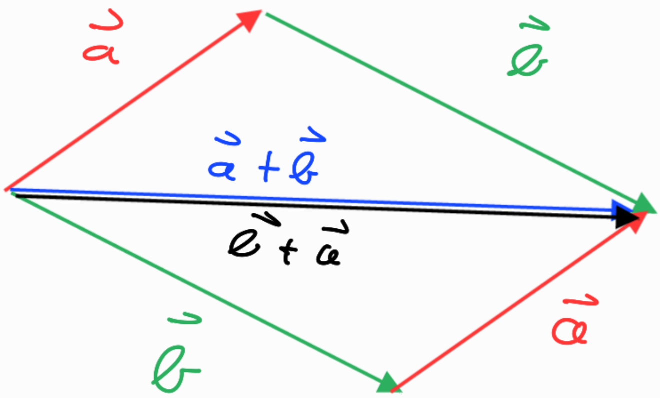
$\stackrel{!}{=}$ Addition von Translationen



Eigenschaften:

1) Addition ist kommutativ

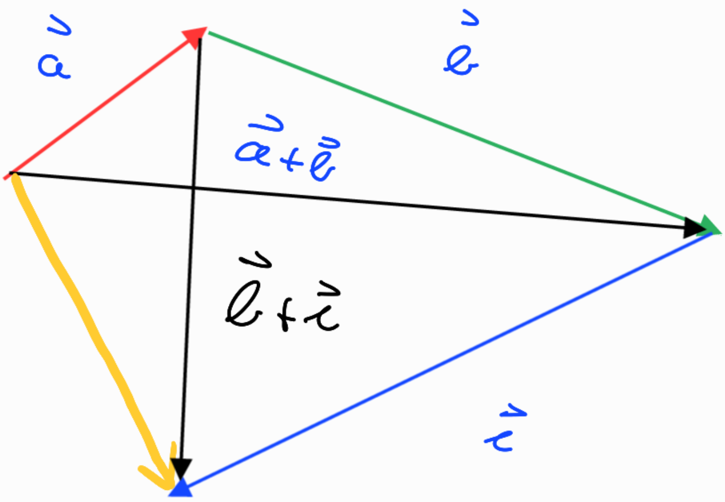
d.h.: $\vec{a} + \vec{b} \overset{!}{=} \vec{b} + \vec{a}$



2) Addition ist assoziativ

$$(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}) + \vec{c} \overset{!}{=} \vec{a} + (\underbrace{\vec{b} + \vec{c}})$$

✓



3) es gibt Null-Translation:

$$\vec{o} = \overrightarrow{XX}$$

d.h. es gilt: $\vec{a} + \vec{o} \overset{!}{=} \vec{a}$

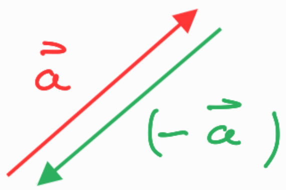
für alle $\vec{a}$

4) zu jeder Translation $\vec{a}$ gibt es

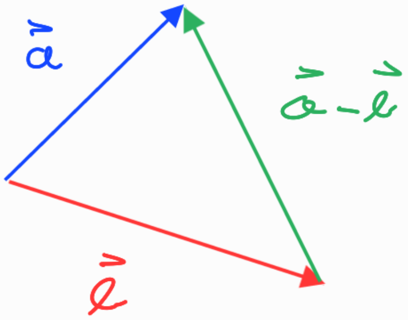
genau eine inverse Translation

$$(-\vec{a})$$

derart, dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$



$\longrightarrow$ Subtraktion von Translationen:



$$\vec a - \vec b := \vec a + (-\vec b)$$

$$\vec a \overset{?}{=} \vec b + (\vec a - \vec b) = \vec b + \vec a + (-\vec b)$$

$$= \underbrace{\vec b + (-\vec b)}_{\vec 0} + \vec a = \vec 0 + \vec a \overset{!}{=} \vec a$$

Zusammenfassung: Eigenschaften der

<u>Addition</u>

(A1) Assoziativität:

$$\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + \vec b + \vec c$$

(A2) Existenz der Null-Translat. $\vec 0$:

$$\vec 0 + \vec a = \vec a$$

(A3) Existenz der inversen Translat. $(-\vec a)$

zu $\vec a$: $\vec a + (-\vec a) = 0$

(A4) Kommutativität:

$$\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$$