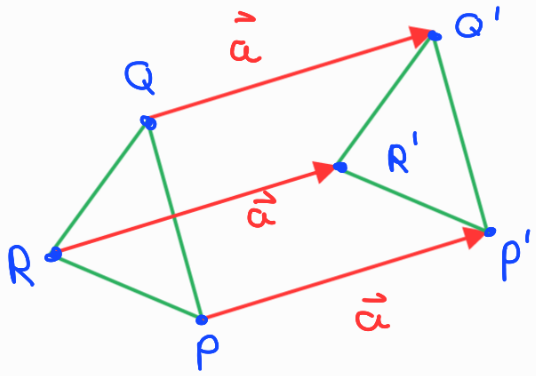
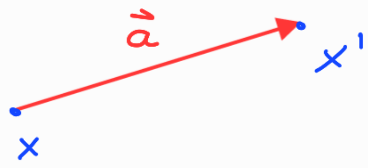
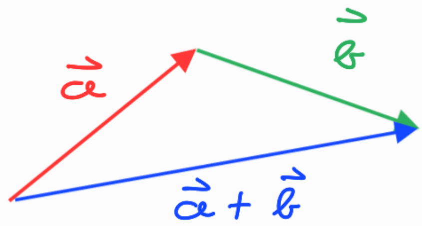
Wiederholung: anschauliche <u>Translationen</u> als Prototypen abstrakter <u>Vektoren</u>:





$$\vec{a} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{XX'}$$

Addition = Hintereinanderausführung:



Geometrie $\rightsquigarrow$ <u>Eigenschaften der Addition</u>

(A1) <u>Assoziativität</u>

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

(A2) Existenz des <u>Null-Vektors</u> $\vec{0}$:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \text{für alle } \vec{a}$$

(A3) Existenz des <u>inversen Vektors</u> $(-\vec{a})$

zu $\vec{a}$: $\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

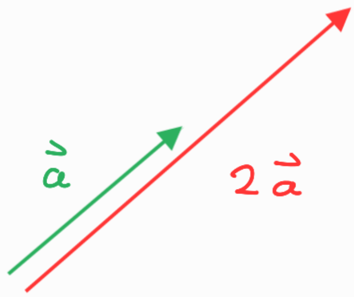
(A4) <u>Kommutativität</u>: $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Streckung (Stauchung) einer Translation $\vec{a}$

um Faktor $\lambda > 1$ (bzw. $\lambda < 1$)

$\hat{=}$ Skalarmultiplikation von $\vec{a}$ mit

Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ ("Skalar")



$(\lambda = 2)$

Geometrie $\rightsquigarrow$ Eigenschaften der Skalarmultiplikation:

(S1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

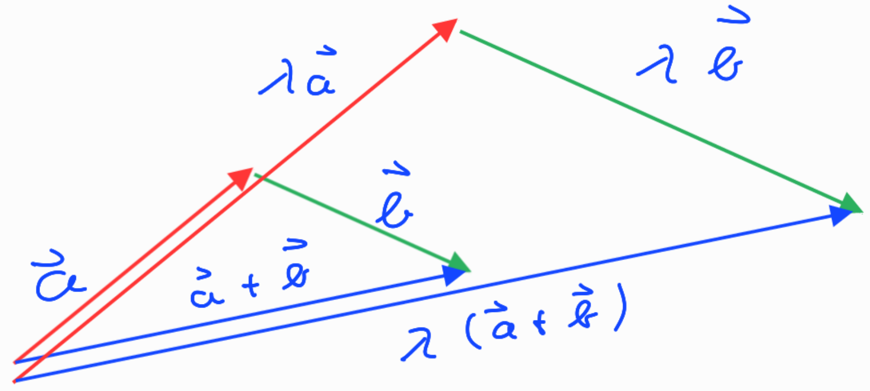
(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

aus (S1) – (S4) folgt:

(S5) $0\vec{a} = \vec{o}$

(S6) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

zu (S1) $\quad \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$



Translationen <u>wesentlich</u> bestimmt durch Verhalten unter <u>Addition</u> (A1 – A4) und <u>Skalarmultiplikation</u> (S1 – S4)

$\leadsto$ <u>Idee</u>:

<u>Vektoren</u> (allgemein) sind Objekte, für die <u>Addition</u> und <u>Skalarmultiplikation</u> gleichermaßen erklärt sind!

Def.: Vektoren, Vektorraum

Eine Menge V von Objekten mit Addition und Skalarmultiplikation gemäß (A1) – (A4) bzw. (S1) – (S4) bildet einen Vektorraum; die Elemente von V sind Vektoren.

Beispiele

a) Translationen ✓

(b) $\mathbb{R}^n$ = Menge aller n-Tupel

$$= \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \;\middle|\; u_i \in \mathbb{R} \right\};$$

Addition

$$\underset{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{\vec{u}}} + \underset{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{\vec{v}}} := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \vec{u} := \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

erfüllen offenbar (A1) – (A4) bzw. (S1)–(S4),

$\longrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ (mit Addition und Skalarmultiplikation wie oben) ist ein Vektorraum.

(2) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden Vektorraum:

$f : x \mapsto f(x), \quad g : x \mapsto g(x)$

Addition def. durch $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$

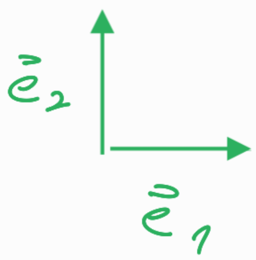
u. Skalarmultiplikation $\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x)$

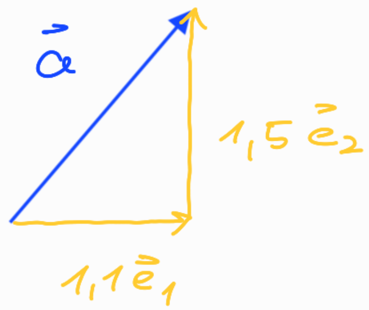
genügen offenbar (A1) – (A4), (S1) – (S4);

$\ulcorner$ $\vec{0} : x \mapsto 0$, $\quad (-f) : x \mapsto -f(x)$ $\lrcorner$

Basis, Basisdarstellung, Dimension eines VRs

$\leadsto$ zuerst am Bsp ebener Translationen:





$$\leadsto \vec{a} = 1{,}1\,\vec{e}_1 + 1{,}5\,\vec{e}_2 =: \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}_B$$

<u>Basis</u> $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

allg.: $$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B$$

<u>Komponenten von $\vec{a}$ bzg. Basis B</u> $= (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Rechnen in Komponenten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B$$

$$\to \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

warum? $\leadsto$

$$\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B \overset{\text{Def.}}{=} a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2$$

$$\vec b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B \overset{\text{Def.}}{=} b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2$$

$$\vec a + \vec b = a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2$$

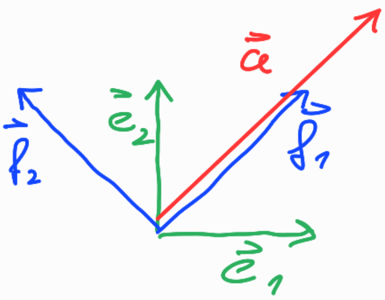
$$= (a_1 + b_1)\,\vec e_1 + (a_2 + b_2)\,\vec e_2 \overset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B$$

$$\lambda \vec a = \lambda\,(a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2)$$

$$= (\lambda a_1)\,\vec e_1 + (\lambda a_2)\,\vec e_2 \overset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

⚠ Komponenten eines Vektors hängen von der gewählten Basis ab!

<u>Bsp.:</u>



$B = (\vec e_1, \vec e_2)$

$B' = (\vec f_1, \vec f_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 1\vec e_1 + 1 \vec e_2 = \vec a = 1{,}5\, \vec f_1 + 0\, \vec f_2 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

Verallgemeinerung für bel. VRe :

Def.: Eine Basis B eines Vektorraums V besteht aus hinreichend vielen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in V$ zwecks eindeutigen Darstellung eines beliebigen Vektors $a \in V$ gemäß

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n =: \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i .$$

Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. B

Die Anzahl n von Basisvektoren ist eindeutig und bestimmt die Dimension von V: $\dim V = n$.

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

wobei
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_B$$

(b) Menge der ganzrat. Funktionen maximal h-ten Grades

$$P_h = \{ f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_h x^h \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

mit Add. und Skalarmultiplik. wie oben bildet VR.

Basis: $B = (f_0, f_1, \dots, f_n)$

mit Basisvektoren (= Funktionen!)

$f_0 : x \longmapsto 1$

$f_1 : x \longmapsto x$

$f_2 : x \longmapsto x^2$

$\vdots$

$f_k : x \longmapsto x^k$

$\rightarrow$ Basisdarstellung von

$P_k \ni f : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k :$

$$f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}_B .$$

$\rightarrow \dim P_k = k+1$