Def.: • λ Eigenwert von Matrix K zum Eigenvektor $\vec{u}$

$:\Longleftrightarrow \quad \boxed{K\vec{u} = \lambda \vec{u}} \qquad (\vec{u} \neq \vec{o})$

• λ Eigenwert von Matrix K

$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, \vec{u} \neq \vec{o}: \quad K\vec{u} = \lambda \vec{u}$

Determinante einer $n \times n$ Matrix

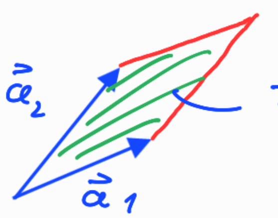
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$$

Spaltenvektoren

det A := orientierte n-dimensionale Volumen des durch die Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ gegebenen n-Spats

$\underline{\underline{n=1}}$: $A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$

$\underline{\underline{n=2}}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$



$$F = \left| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$$

$\underline{\underline{n=3}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

$$\det A = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle \quad \text{(Spatprodukt)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Merkregel von Sarrus:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

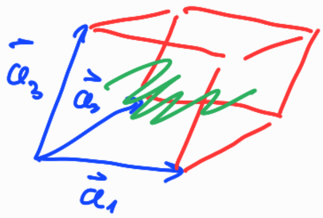
$\underline{\underline{n \geq 4}}$: ? allg. n-dim. Volumen ! s.u.

Determinante nützlich bei der Bestimmung von Eigenwerten ?!

① $\underbrace{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n}_{A}$ linear abhängig

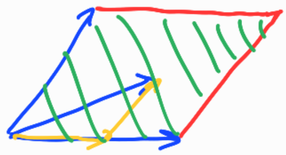
$\iff \det A = 0$

┌ • $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lin. unabhängig:



$\longrightarrow$ Vol $\neq 0$

• $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lin. abhängig:



$\longrightarrow$ Vol $= 0$ ┘

② $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ lin. abhängig

$\iff \exists\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ s.d.

$$\underbrace{\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n}_{\shortparallel} = \vec{0}$$

$\iff \qquad A\vec{x} = \vec{0}$

③ $K\vec{u} = \lambda \vec{u} \iff \underbrace{(K - I\lambda)}_{A} \vec{u} = \vec{0}$ $(\vec{u} \neq 0)$

[mit n-dim Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \lambda \vec{u} = \lambda I \vec{u}$$

$\rightarrow \quad K\vec{u} = \lambda I \vec{u} \iff (K - \lambda I)\vec{u} = 0$]

①, ②, ③ impliziert:

$$\boxed{\lambda \text{ Eigenwert von } K \iff \det(K - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0}$$

Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer $n \times n$ Matrix K:

1) bestimme Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Gleichung

$$\det(K - \lambda I) = 0$$

2) bestimme Lösungen $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ der linearen Gleichungssysteme

$$(K - \lambda_i I)\vec{u}_i = \vec{0}$$

$\rightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind Eigenwerte von K zu Eigenvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$!

$\ulcorner$ $P(\lambda) := \det(K - \lambda I)$: charakteristisches Polynom der Matr. K

$\rightarrow$ "Die Eigenwerte einer Matrix sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms." $\lrcorner$

Bsp:

Matrix $K = \begin{pmatrix} \frac{k+q}{m} & -q/m \\ -\frac{q}{m} & \frac{k+q}{m} \end{pmatrix}$; EWe, EVen?

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{k+q}{m} - \lambda & -q/m \\ -q/m & \frac{k+q}{m} - \lambda \end{pmatrix}$

$$\det(K - \lambda I) = \left(\frac{k+q}{m} - \lambda\right)^2 - q^2/m^2 \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ $\lambda_{1/2} = \mp \frac{q}{m} + \frac{k+q}{m}$

$\lambda_1 = \frac{k}{m}$, $\lambda_2 = \frac{k+2q}{m}$ $\left(\begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{k/m} \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{k+2q}{m}} \end{array} \right)$

- Bestimmung der Eigenvektoren:

$\lambda_1 = \frac{k}{m}$: $\quad \vec{u}_1$: $\quad (K - \lambda_1 I)\,\vec{u}_1 = \vec{0}$

$$K - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \frac{k+q}{m} - \frac{k}{m} & -q/m \\ -q/m & \frac{k+q}{m} - \frac{k}{m} \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(K - \lambda_1 I)\,\vec{u}_1 = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_2 = \frac{k+2q}{m}$: $\quad K - \lambda_2 I = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow (K - \lambda_2 I)\,\vec{u}_2 = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} .$$

$n \geq 4$?

Determinante einer $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$$

$\det A \equiv \det_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) :=$ orientierte n-dim Volumen des n-Spats mit Kantenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$

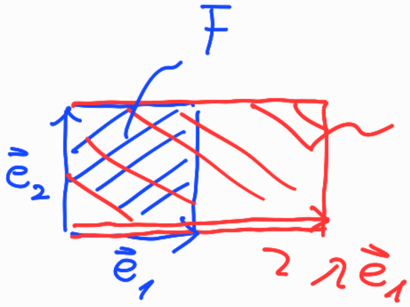
Idee: bestimme Eigenschaften, die ein Volumenmaß besitzen sollte!

$\Rightarrow$ Def. für $\det_n$!

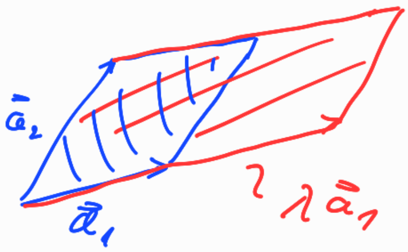
Eigenschaften ?

- $\det_n(\vec e_1, \vec e_2, \dots, \vec e_n) \overset{!}{=} 1$ (Normierung)

- $n=2$:



$F' = \lambda F$!



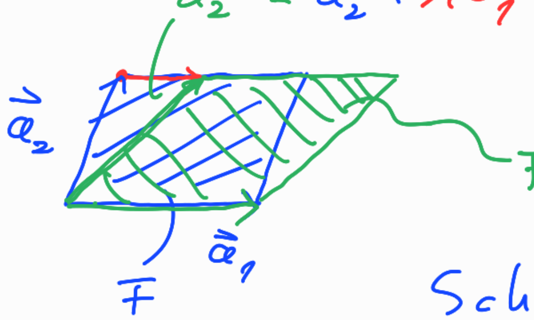
$F' = \lambda F$!

$$\det_2(\lambda \vec a_1, \vec a_2) \overset{!}{=} \lambda \det_2(\vec a_1, \vec a_2)$$

- Skalierung:

$$\det_n(\vec a_1, \dots, \lambda \vec a_i, \dots \vec a_n) \overset{!}{=} \lambda \det_n(\vec a_1, \dots, \vec a_i, \dots \vec a_n)$$

- $n=2$: $\vec a_2{}' = \vec a_2 + \lambda \vec a_1$!



$F' = F$!

Scherinvarianz !

d.h. $\det_2(\vec a_1, \vec a_2) \overset{!}{=} \det_2(\vec a_1, \vec a_2 + \lambda \vec a_1)$

Eigenschaften von $\det_n$:

(D1) Skalierung:

$$\det_n(\vec{a}_1, .., \lambda\vec{a}_i, \dots \vec{a}_n) = \lambda \det_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots \vec{a}_n)$$

(D2) Scherinvarianz:

$$\det_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots \vec{a}_n) = \det_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \lambda\vec{a}_l, \dots)$$

$$l \neq i$$

(D3) Normierung:

$$\det_n(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1 \quad !$$

(D1 – D3) legen $\det_n$ fest!

$\Rightarrow$ weitere D4 – D7

$\Rightarrow$ Leibniz-Formel

$\Rightarrow$ Gauß-Verfahren !

(D4) verallg. Scherinvarianz:

$$\det_n(\ldots,\vec a_i,\ldots) \overset{!}{=} \det_n(\ldots,\vec a_i+\vec u,\ldots) \quad \checkmark$$

$$\vec u = \sum_{l\neq i} u_l \vec a_l$$

(D5) $\vec a_1,\ldots,\vec a_n$ lin. <u>ab</u>hängig

$$\Rightarrow \det_n(\vec a_1,\ldots,\vec a_n) = 0 \quad !$$

[

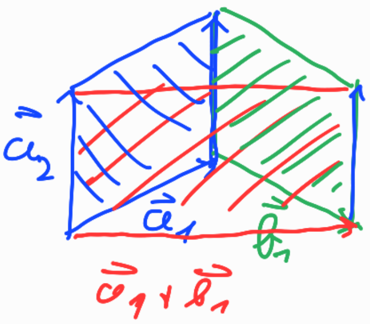
$$\rightarrow \quad \vec a_i = \sum_{l\neq i} u_l \vec a_l =: -\vec u$$

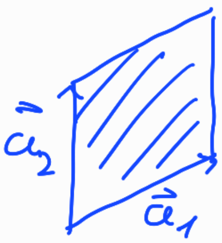
$$\det_n(\ldots,\vec a_i,\ldots) \overset{(D4)}{=} \det_n(\ldots,\underbrace{\vec a_i+\vec u}_{=\vec 0},\ldots)$$

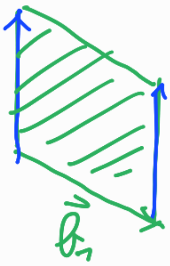
$$\overset{(D1)}{=} 0 \det_n(\ldots,\vec 0,\ldots) = 0$$

(D6) $\det_n(\ldots,\vec a_i+\vec b_i,\ldots) \overset{(*)}{=} \det_n(\ldots,\vec a_i,\ldots) + \det_n(\ldots,\vec b_i,\ldots)$

<u>n=2</u> geometrisch:







(*) wegen Scherinvarianz D2!

(D7) <u>Antisymmetrie</u>

$$\det_n(\ldots,\vec{a}_i,\ldots,\vec{a}_j,\ldots) = -\det_n(\ldots,\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_i,\ldots)$$

Γ

$$\det_n(\ldots\ \vec{a}_i,\ldots,\vec{a}_j,\ldots) \overset{D2}{=} \det_n(\ldots,\vec{a}_i+\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_j\ldots)$$

$$\overset{D1}{=} -\det_n(\ldots,\vec{a}_i+\vec{a}_j,\ldots,-\vec{a}_j,\ldots)$$

$$\overset{D2}{=} -\det_n(\ldots,\vec{a}_i+\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_i\ldots)$$

$$\overset{D2}{=} -\det_n(\ldots,\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_i\ldots)$$

D1 – D7 $\rightarrow$ <u>Gauß-Verfahren</u> zur Berechnung der Determinante:

zuerst sehr einfacher Spezialfall:

- A Diagonalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & d_3 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \ldots & 0 & d_n \end{pmatrix} = (d_1\vec{e}_1, d_2\vec{e}_2, \ldots, d_n\vec{e}_n)$$

$$\det A = \det_n(d_1\vec{e}_1, d_2\vec{e}_2, \dots, d_n\vec{e}_n) \overset{(D1)^n}{=} d_1 d_2 \cdots d_n \cdot \underbrace{\det_n(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}_{=1 \quad D3}$$

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \; d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \,.$$

- A obere Diagonalmatrix:

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots \\ 0 & d_2 & a_{23} & & \vdots \\ 0 & 0 & d_3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_n \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & a_{13} & & \\ 0 & d_2 & a_{23} & & \\ \vdots & \vdots & d_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

- allg. Matrix A:

Forme A mittels Scherungen und ggf. Spalten-m vertauschungen zu einer <u>oberen Diagonalmatrix</u> $\tilde{A}$ um

$\longrightarrow \det A = (-1)^m \det \tilde{A}$ ✓

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det_n \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$+$ $\quad \cdot\left(\frac{-a_{n1}}{a_{nn}}\right)$

$+$ $\quad -\frac{a_{n2}}{a_{nn}}$

$$= \cdots = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{n-1,n-1} & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$= (-1)^m \det(\tilde{A})$$

obere Diagonalmatrix