Wiederholung

Determinante einer Matrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

:= orientiertes Volumen des n-dim.

Spats mit Kantenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

def. durch (z.B.):

(D1) Skalierung:

$$\det(\dots, \lambda \vec{a}_i, \dots) = \lambda \det(\dots, \vec{a}_i \dots)$$

(D2) Scherinvarianz:

$$\det(\dots, \vec{a}_i \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i + \lambda \vec{a}_j, \dots)$$

$$j \neq i$$

(D3) Normierung: $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1$

(D4) $\det(\dots, \vec{a}_i, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i + \vec{u}, \dots)$

$$\vec{u} = \sum_{\ell \neq i} \mu_\ell \vec{a}_\ell$$

(D5) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig

$$\iff \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$$

(D6) $$\det(\dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i, \dots) + \det(\dots, \vec{b}_i, \dots)$$

(D7) $$\det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots) = -\det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots)$$

(D8) $\det A \neq 0 \iff A$ invertierbar

$\lceil \exists A^{-1}: \quad A^{-1}A = I \rfloor$

(D9) $$\det A^T \stackrel{!}{=} \det A$$

$$\lceil \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rfloor$$

(D10): $$\boxed{\det(AB) \stackrel{!}{=} \det A \cdot \det B}$$

Γ (D9): $\quad 1 = \det(I) = \det(\underbrace{A^{-1}A}_{=I})$

$$\overset{(D9)}{=} \det(A^{-1}) \det(A)$$

$$\rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \,. \quad \lrcorner$$

Warum gilt $\det(AB) = \det A \det B$?

geometrisch:

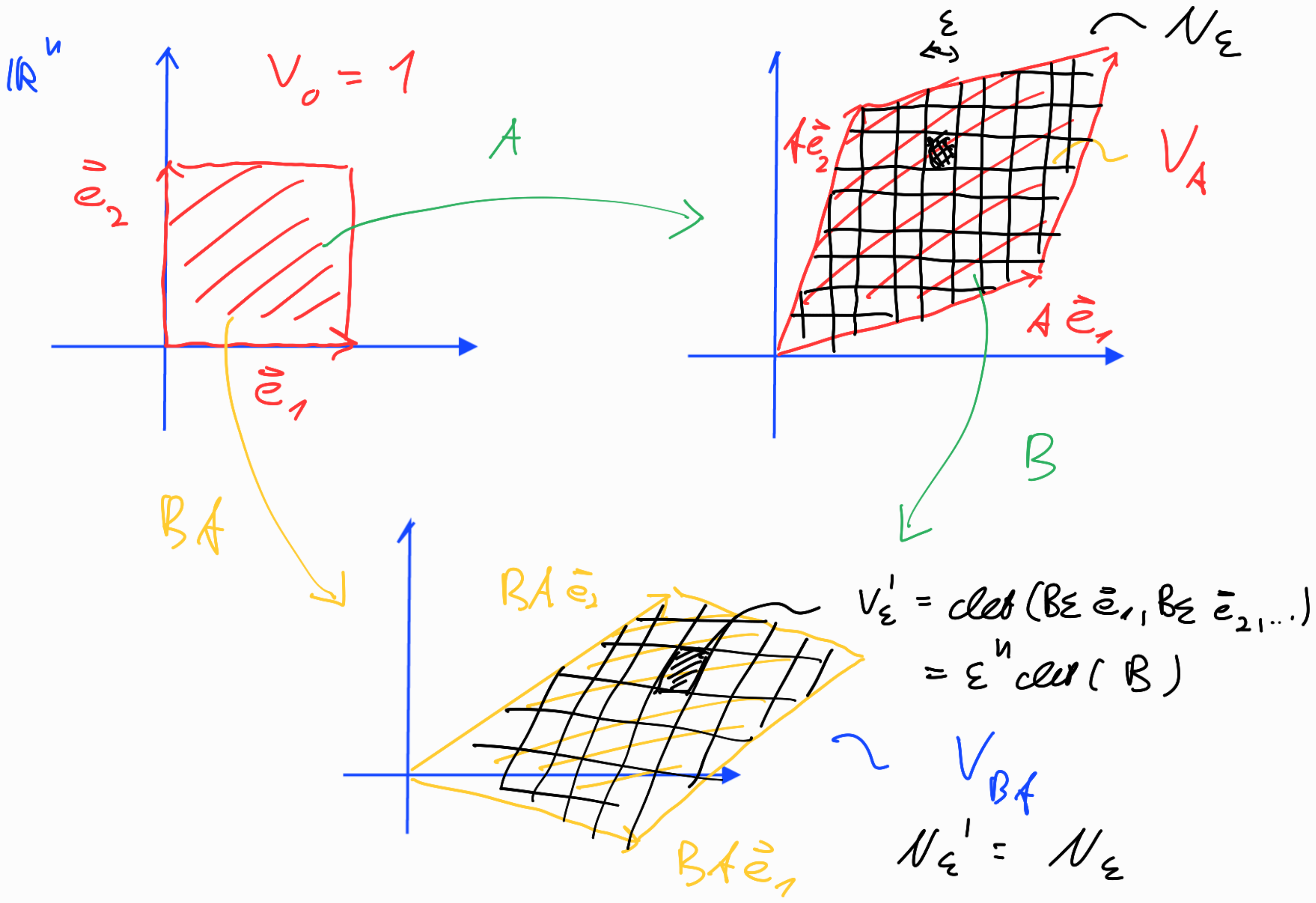
$n \times n$ Matrix $A \rightarrow$ Abb. $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

$n \times n$ " " $B \rightarrow$ $B : \vec{x} \mapsto B\vec{x}$

Γ $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$!

$A(\lambda \vec{x}) = \lambda A \vec{x}$

d.h. A, B lineare Abben $\lrcorner$



$$V_A = \det(A\vec e_1, A\vec e_2) = \det(A) \overset{!}{=} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^n$$

$$V_{BA} = \det(BA) \overset{!}{=} V'_\varepsilon \, N'_\varepsilon$$

$$= \underbrace{\varepsilon^n \det(B) \cdot N_\varepsilon}_{\hat{=}\ \det A}$$

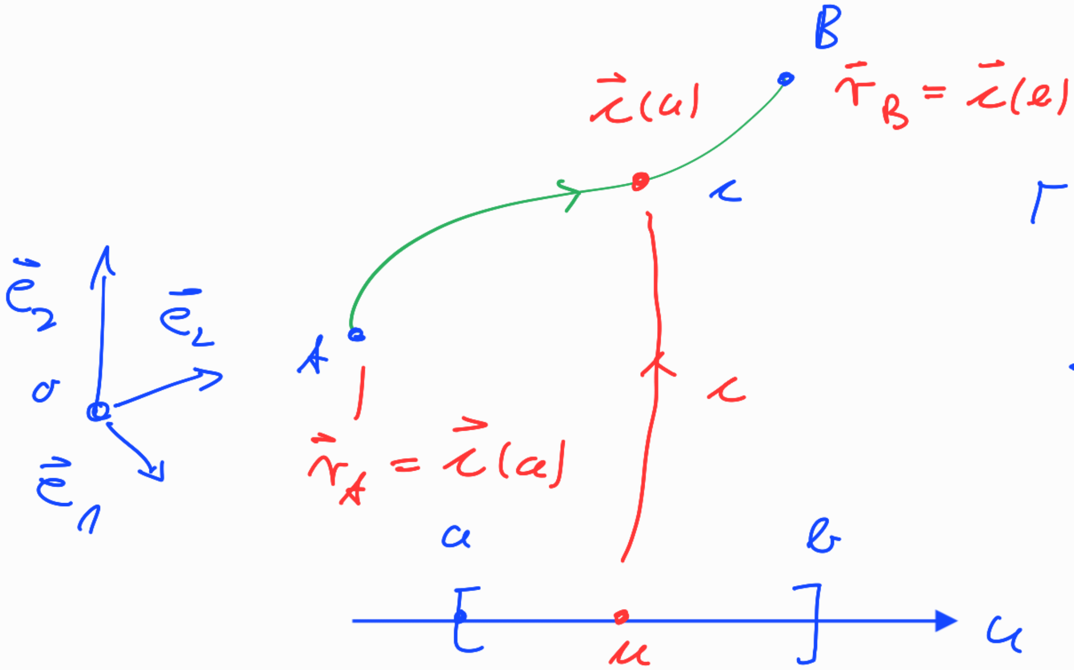
$$= \det A \cdot \det B \quad !$$

Mehrdimensionale Integration:

Kurvenintegrale, Flächen-, Volumenintegrale

→ **Kurvenintegral** (Wegintegral, Konturintegral)

Kurve c im Raum ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...)



┌ • Länge ?

• Arbeit längs Kurve c im Kraftfeld $\vec{F}$? ┘

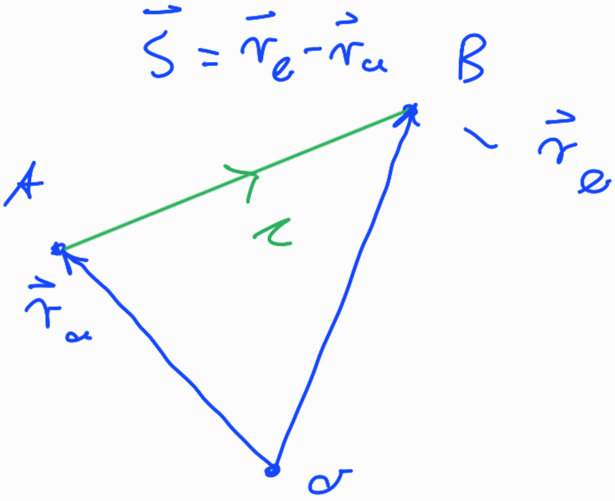
Kurve c beschrieben durch Parametrisierung

$= \text{diffb. Abb.} \quad c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$u \longmapsto \vec{c}(u)$

┌

Beispiel: Kurve c = Strecke zwischen A und B !



$\leadsto \quad c: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

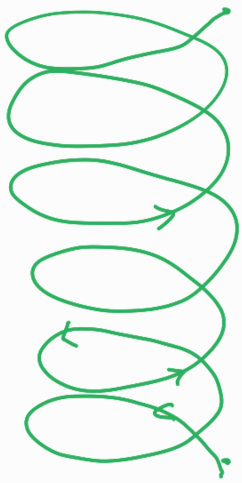
$$u \longmapsto \vec{c}(u) = \vec{r}_a + u\,\vec{s}$$

2. <u>Beispiel</u>: Kurve c parametrisiert durch

$$c: [0, 2\pi n] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \longmapsto \vec{c}(u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ \frac{H}{2\pi n} \cdot u \end{pmatrix}$$

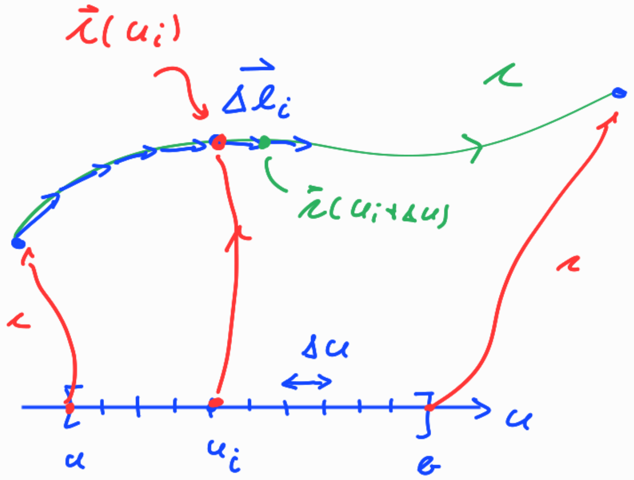
$n \in \mathbb{N}$



c : Spirale mit n Windungen, Höhe H, Radius R.

Länge einer Kurve: $L(c)$

$\leadsto$ Parametrisierung $c: u \mapsto \vec{c}(u)$



$$L = \sum_{i=0}^{N-1} |\Delta\vec{l}_i|$$

$u_i = a + i\cdot\Delta u$

$i = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\Delta\vec{l}_i = \underbrace{\frac{\vec{c}(u_i+\Delta u) - \vec{c}(u_i)}{\Delta u}}_{\simeq \frac{d\vec{c}(u_i)}{du}} \cdot \Delta u$$

$$\to \quad L = \sum_{i=0}^{N-1} \left|\frac{d\vec{c}}{du}(u_i)\right| \Delta u \underset{\Delta u}{=} \int_a^b \Big|\underbrace{\frac{d\vec{c}}{du}(u)}_{\vec{c}\,'(u)}\Big|\, du$$

Länge der Kurve c:

$$\boxed{L(c) \equiv \int_c |d\vec{l}\,| := \int_a^b |\vec{c}\,'(u)|\, du}$$

Bsp: Umfang eines Kreises von Radius R (U_R)

= Länge der Kurve c

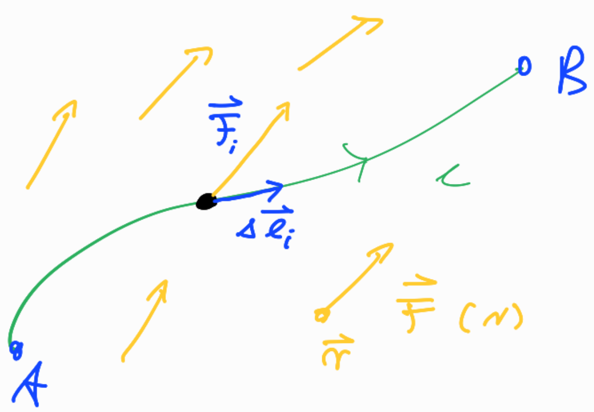
$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$u \mapsto \vec{c}(u) = R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$$

$$\to U_R = L(c) = \int_0^{2\pi} R \, du = 2\pi R$$

$$|\vec{c}\,'(u)| = R \left| \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix} \right| = R$$

- aufzuwendende Arbeit um Körper längs Kurve c unter Kraftfeld $\vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ von A nach B zu bewegen ?



$$c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$W = \sum_i \Delta W_i = -\sum_i \langle \vec{F}_i, \Delta\vec{\ell}_i \rangle$$

- $\vec{\Delta l}_i = \vec{r}\,'(u_i)\,\Delta u$
- $\vec{F}_i = \vec{F}(\vec{r}(u_i))$

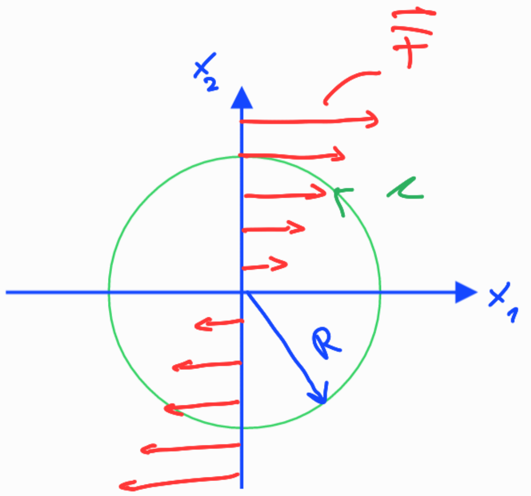
$\longrightarrow \quad W = -\sum_{i=0}^{N-1} \langle \vec{F}(\vec{r}(u_i)), \vec{r}\,'(u_i) \rangle \Delta u$

d.h. $\boxed{W(\mathcal{C}) \equiv -\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{l} := -\int_a^b \langle \vec{F}(\vec{r}(u)), \vec{r}\,'(u) \rangle \, du}$

allg: Kurvenintegral eines Vektorfeldes $\vec{A} : \vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r})$ längs Kurve $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot d\vec{l} := \int_a^b \langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \vec{r}\,'(u) \rangle \, du}$$

Bsp:



$\vec{F}(x_1, x_2) = x_2 \vec{e}_1$

$\mathcal{C} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$u \mapsto R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$

• $\vec{c}\,'(u) = R\begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix}$

• $\vec{F}(\vec{c}(u)) = R \sin u \cdot \vec{e}_1$

$\hookrightarrow \langle \vec{F}(\vec{c}(u)), \vec{c}\,'(u) \rangle = -R^2 \sin^2 u$

$$\Rightarrow \int_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 u \, du$$

$$= -R \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 u}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2u)} \, du = \underline{\underline{-\pi R}}$$