Fouriertransformation

Motivation: harm. Oszill. + externer harmonischer Kraft

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad f(t) = f_0 \cos(\omega t)$$

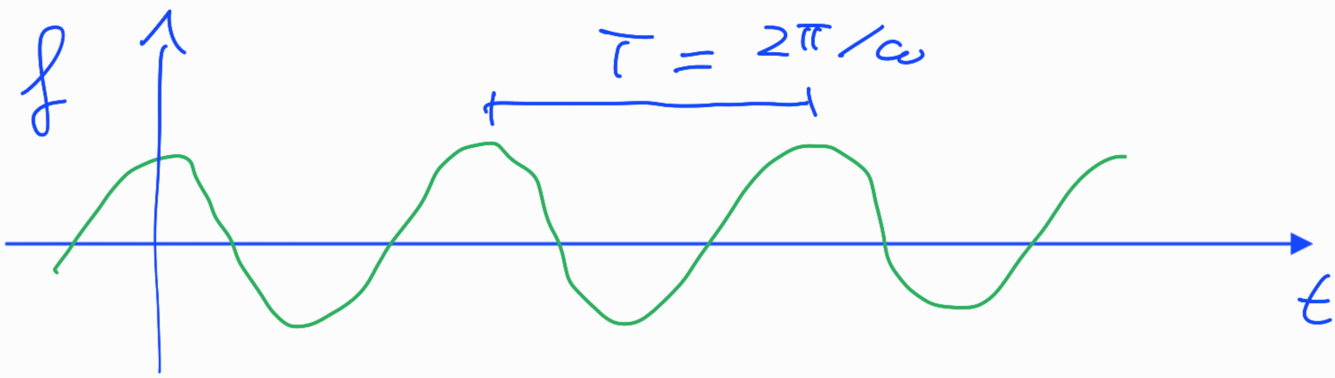
(vgl. Übr. 13

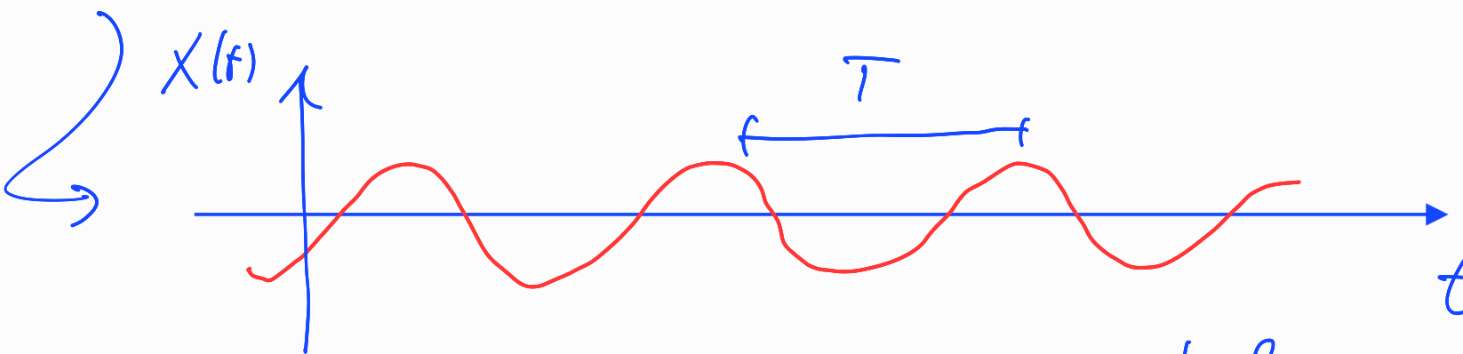
$\Omega = \omega$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \, e^{i\omega t}$$

erzwungene harmonische Schwingung:

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\, \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\, e^{i\omega t}}$$

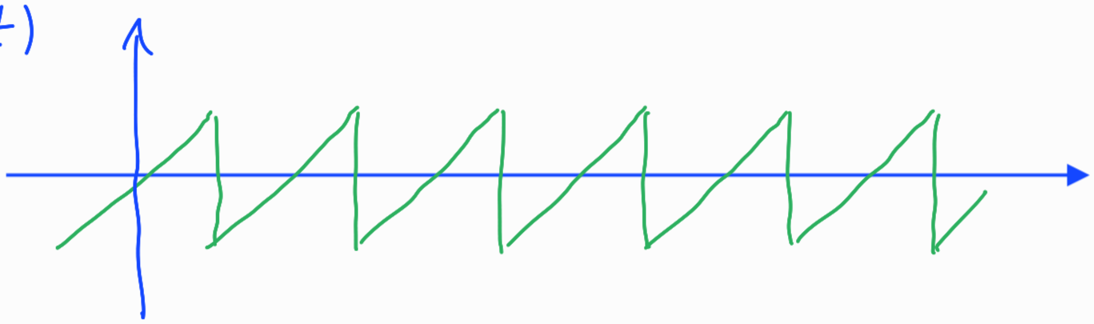


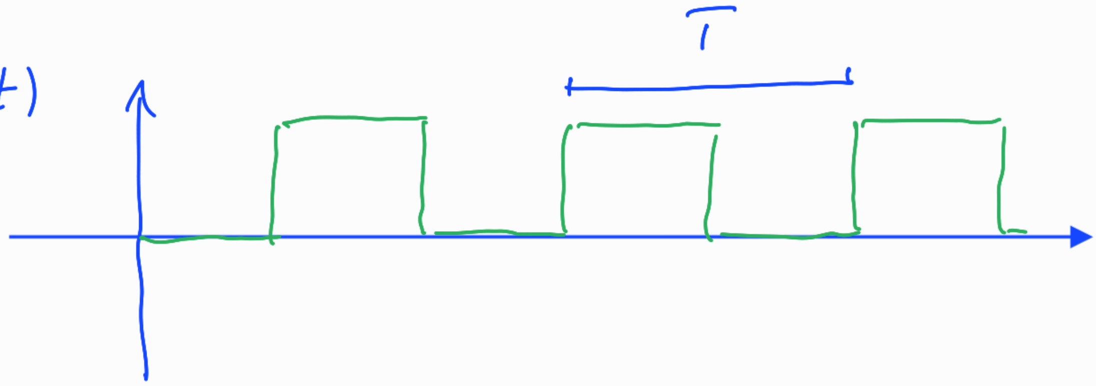


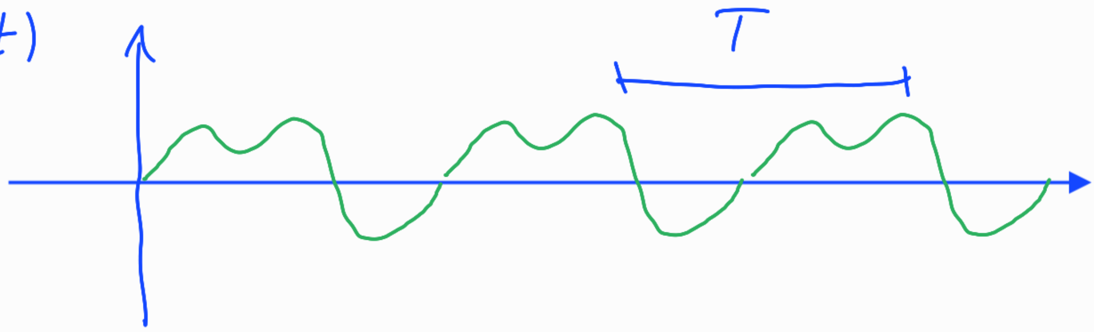
$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi) \qquad a = \left| \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right|$$

neues Problem:

Oszillator-Antwort auf alle (periodischen) externen Kraft $f(t)$! z.B:







$\Rightarrow \quad x(t) = ?$

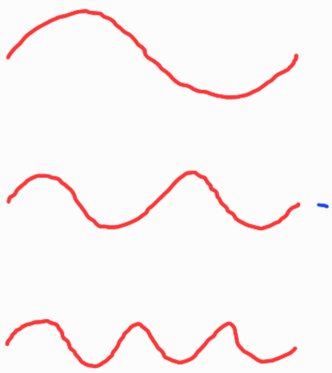
Fourier (1768 – 1830) ~ 1800 ± 20:

$\Rightarrow$

stelle <u>T-periodische</u> Fkt $f(t)$ $\left(\overset{!}{=} f(t+T) \ \forall t \right)$

durch "harmonische Schwingungen": $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ Grundschwingung
- $\cos(2\omega t)$, $\sin(2\omega t)$ "1. Harmonische"
- $\cos(3\omega t)$, $\sin(3\omega t)$ "2. Harmonische"



$\vdots$

dar:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{N} \left(f_n^c \cos(\omega_n t) + f_n^s \sin(\omega_n t) \right)}$$

T-periodisch

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$$

mit: $\cos(\omega_n t) = \left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t} \right) / 2$

$\sin(\omega_n t) = \left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t} \right) / 2i$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}} \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$$

- Fourier-Reihe der T-per. Fkt f
- f_n: Fourier-Koeffizient

ext. Kraft:

$$\boxed{f(t) = \sum_n \underbrace{f_n \, e^{i\omega_n t}}}$$

$$x(t) = \sum_n x_n(t) = \mathrm{Re} \sum_n \underbrace{\frac{f_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2 + i\gamma\omega_n}}_{= x_n} e^{i\omega_n t}$$

!

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten f_n:

Erinnerung: Lin. Algebra:

Vektor $\vec{v} \in V$, Basis $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_N\}$

$\Rightarrow$ Basisdarstellung: $\vec{v} = \sum_{n=1}^{N} v_n \vec{b}_n \quad \left[\equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}_B \right]$

Bestimmung der Komponenten v_n ?

(von $\vec{v}$ bzgl. Basis B)

z.B. im euklidischen VR $\underline{\underline{V}}$!

$\rightsquigarrow$ Skalarprodukt: $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

mit Eigenschaften:

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

$|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \quad \vec{u} \neq \vec{0}$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

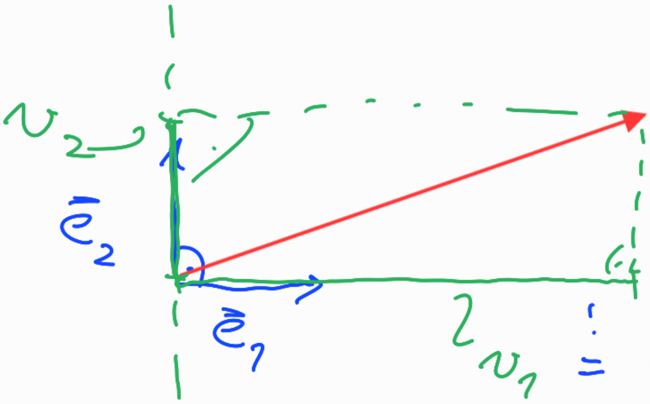
$\rightsquigarrow$ $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ ist Orthonormalbasis (ONB)

g.d.w.: $\cdot\ |\vec{e}_n| = 1$, $\quad n \neq m : \vec{e}_n \perp \vec{e}_m$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = \begin{cases} 0 : & n \neq m \\ 1 : & n = m \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow : \quad \langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = \delta_{n,m}$$

z.B. $\dim V = 2$, ONB $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$



$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \qquad (*)$$

$$v_1 \overset{!}{=} \langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle$$

$$v_2 \overset{!}{=} \langle \vec{e}_2, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle \overset{*}{=} \langle \vec{e}_1, v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \rangle$$

$$= v_1 \underbrace{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle}_{=1} + \cancel{v_2 \underbrace{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}_{=0}}$$

$$= v_1$$

Wunschvorstellung:

"harm." Fkt. $\{e_n : t \mapsto e^{i\omega_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$

bilden ONB des Vektorraums

der T-periodischen Funktionen!

$$\rightarrow \quad f(t) = \sum_n f_n\, e_n(t) = \sum_n f_n\, e^{i\omega_n t}$$

T-Per. Fkt , $\qquad f_n \overset{!}{=} \langle e_n, f \rangle$!

Menge der T-period. Fkten Vektorraum ?

- $\exists$ Vektoraddition !

$$f(t) + g(t) \overset{\text{Def.}!}{=:} (f+g)(t)$$

$$\ulcorner (f+g)(t+T) \overset{\text{Def.}}{=} f(t+T) + g(t+T)$$

$$\overset{\text{Def}}{=} f(t) + g(t) = (f+g)(t)$$

- $\exists$ Skalarmultiplikation ✓

Def.: <u>komplexer Vektorraum V</u>:

1) es gibt Vektoraddition:

$$+ : V \times V \rightarrow V \qquad (A1\text{-}A4)$$

2) es gilt <u>komplexe</u> Skalarmultipl.

$$\mathbb{C} \times V \longrightarrow V$$

$$\lambda, \vec{u} \longmapsto \lambda \vec{u}$$

Bsp: 1)

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

kompl. n-Tupel

2) komplexe T-period. Fkten:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto f(t)$$

z.B. $f(t) \equiv e_n(t) = e^{i\omega_n t}$

(unitär)

Def: hermitescher Vektorraum :=

ein komplexer VR mit hermiteschem Skalarprodukt: $\langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

$$\vec{u}, \vec{v} \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

mit Eigenschaften: (i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^*$

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ für $\vec{u} \neq 0$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$