Wiederholung: Fourier-Reihe:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \, e^{i\omega_n t}}$$

T-periodische Fkt.

d.h. $f(t) = f(t+T)$

Fourier-Koeffizienten

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$$

komplexer Vektorraum $(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$

Menge V mit Vektoraddition „+"

und komplexer Skalarmultiplikation

$$\mathbb{C} \ni \lambda, \underset{V}{\underset{\cap}{\vec{v}}} \longmapsto \lambda \vec{v} \in V$$

hermitesches Skalarprodukt:

Abb $\langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\vec{u}, \vec{v} \longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

mit Eigenschaften:

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^*$

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ für $\vec{u} \neq 0$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\hookrightarrow \quad \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda^* \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Bsp: $\mathbb{C}^N = \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{C} \right\}$

$\Rightarrow$ hermitesches Skalarprodukt:

Standardskalarprodukt:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^{N} u_i^* v_i$$

Standardbasis: $\left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \vec{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ist ONB!

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{N} v_i \vec{e}_i$$

mit $v_i = \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle$ ✓

Menge der T-per. Fkten $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bilden

komplexen VR (✓),

Beh.: f, g T-per.

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^*(t)\, g(t)\, dt}$$

ist ein hermitesches Skalarprodukt!

z.z.: (i) $\langle f, g \rangle \stackrel{!}{=} \langle g, f \rangle^*$: ✓

$$\langle f, g \rangle = \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t)\, f(t)\, dt \right)^* = \langle g, f \rangle^*$$

$$(a^* b)^* = b^* a$$

$$\left(\int g^*(t) f(t)\, dt\right)^* = \int f^*(t)\, g(t)\, dt$$

(ii) $$\langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{|f(t)|^2}_{\geq 0} dt > 0 \quad ✓$$

$f \neq 0$

(iii): $$\langle f, \lambda g + h \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) \cdot (\lambda g(t) + h(t))\, dt$$

$$= \lambda \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^*(t)\, g(t)\, dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)\, h(t)\, dt = \lambda \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \quad ✓$$

Funktionenmenge

$$\left\{ e_n : t \mapsto e_n(t) = e^{i\omega_n t} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad !$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

bildet eine ONB des VRs der

T-period. Funktionen!

- Vollständigkeit ? (s. u.)
- <u>Orthonormalität</u>:

z.z.: • $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ für $n \neq m$!

• $|e_n| = 1$

$$\left[\; |e_n|^2 = \langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overset{e^{-i\omega_n t}}{\overset{\shortparallel}{e_n^*(t)}} \; \overset{e^{i\omega_n t}}{\overset{\shortparallel}{e_n(t)}} \, dt \right.$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \, dt = 1 \quad \checkmark$$

- $n \neq m$, $\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_m t}}_{= e^{i(\omega_m - \omega_n)t}} dt$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i \frac{2\pi}{T} t \cdot \ell} dt$$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$

$\omega_m = \frac{2\pi}{T} \cdot m$

$\underline{\underline{\ell = m - n \neq 0}}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi\ell} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} \underset{\substack{\parallel \\ (\cos x + i \sin x)}}{e^{ix}} dx = 0 \; !$$

$t = \frac{T}{2\pi\ell} x$

$\lrcorner$

Fourier-Reihe: T-per. Fkt $\underline{\underline{f}} : t \mapsto f(t)$:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e_n$$

mit Komponenten f_n bestimmt:

$$\boxed{f_n \overset{!}{=} \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t) dt}$$

Satz: Eine T-per. Funktion f kann durch eine Fourier-Reihe

$$\boxed{f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \, e^{i\omega_n t}, \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T}\cdot n},$$

dargestellt werden. Die Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch

$$\boxed{f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_n t}\, dt}$$

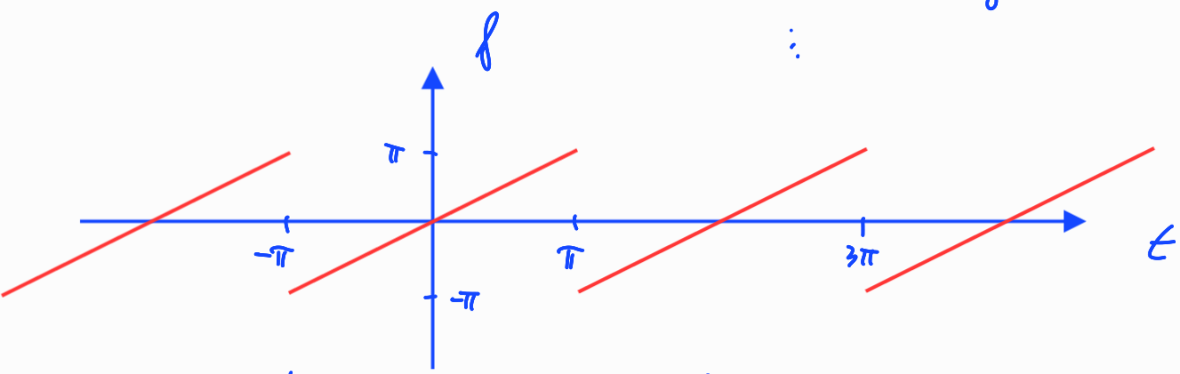
Bsp.:

$$T = 2\pi, \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T}\cdot n = n$$

2π-per. Fkt. f: $\quad t\in[-\pi,\pi[\; : \; f(t) = t$

$\quad t\in[\pi,3\pi[\; : \; f(t) = t-2\pi$

$\vdots$



$$f(t) \overset{!}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \, e^{-int}$$

f_n ?

$n = 0$:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{=t}\, e^{-i\overset{0}{\overset{\parallel}{\omega_0}} t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = 0$$

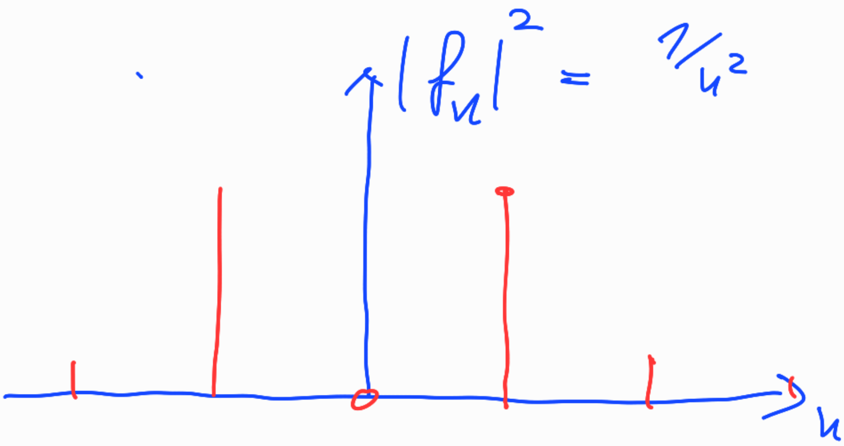
$n \neq 0$:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i\overset{\omega_n}{\overset{\parallel}{n}} t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ \underbrace{t\,\frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\frac{\pi}{-in} e^{-i\pi n} + \frac{\pi}{-in} e^{+i\pi n}} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1\, \frac{e^{-int}}{-in}\, dt}_{=0!\ (s.o.)} \right\}$$

$$= \frac{-1}{2ni}\Big(\underbrace{(\underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1})^n + (\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1})^n}_{2(-1)^n} \Big) = \frac{-1}{ni}(-1)^n$$

$$f_n = \frac{i}{n}(-1)^n$$



$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{i}{n}(-1)^n e^{int}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}(-1)^n e^{int} - \frac{i}{n}(-1)^n e^{-int} \right)$$

d.h. $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n \underbrace{\left(e^{+int} - e^{-int}\right)}_{2i \sin nt}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

$$f(t) = 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots + \dots\right)$$

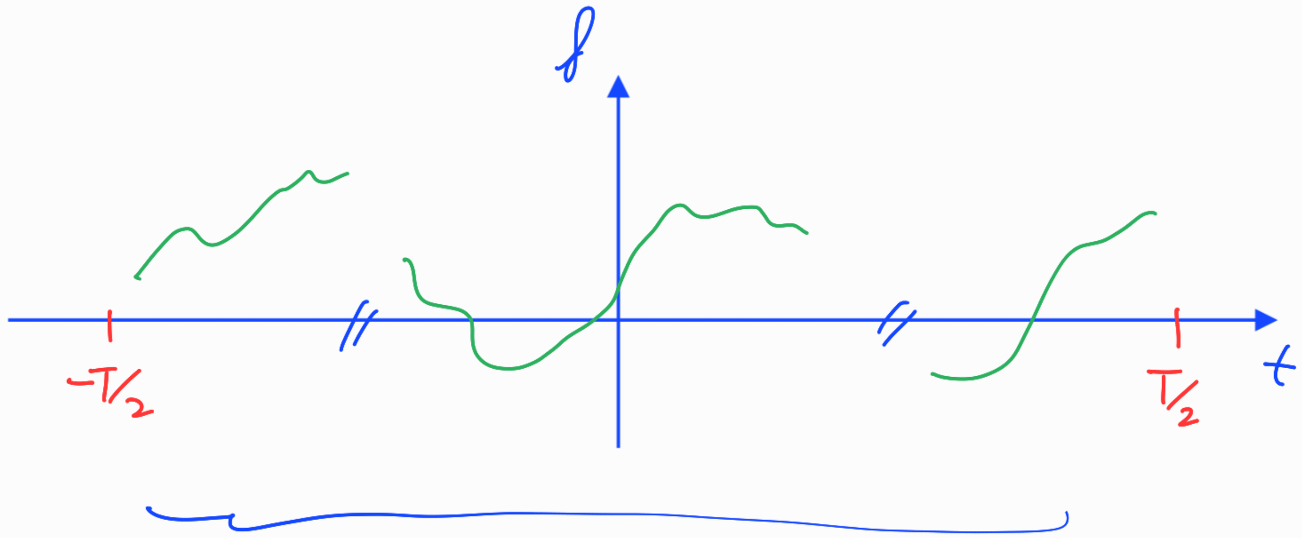
$$\frac{\pi}{2} = f(\pi/2) = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

2) Fourier-Transformation:

2)

Fourier-Transformation

betrachte T-periodische Fkt. für große T:

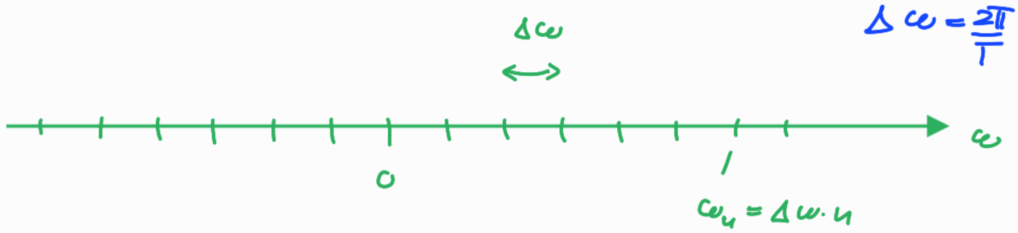


bel. Fkt. $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$!

$$\to f(t) \overset{!}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \, e^{i\omega_n t}, \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$$

$$= \Delta\omega \cdot n$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \to 0$$



$$f(t) = \sum_{\omega_n \in \mathbb{R}} \frac{1}{\Delta\omega} f_{\frac{\omega_n}{\Delta\omega}} \, e^{i\omega_n t} \, \Delta\omega$$

$$\underset{\Delta\omega \to 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \underbrace{T f_{\frac{\omega}{\Delta\omega}}}_{\simeq \, \cancel{T} \cdot \frac{1}{\cancel{T}} \int_{-T/2 \to -\infty}^{T/2 \to +\infty} f(t) \, e^{-i\omega t} \, dt \, = \, \hat{f}(\omega) \, !} e^{i\omega t} \, d\omega$$

Def.: Die Fourier-transformierte der Fkt. $f(t)$ ist

$$\boxed{\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt} .$$

Satz: $f(t)$ ist die inverse Fourier-trans-formierte:

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}}$$

Notation:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeit}}}{f(t)} \xrightarrow{F.T} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Frequenz}}}{\hat{f}(\omega)}$$

$$\overset{\substack{\text{Ort} \\ \downarrow}}{f(x)} \xrightarrow{F.T} \overset{\substack{\text{Wellenzahl} \\ \downarrow}}{\hat{f}(k)}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, \frac{dk}{2\pi} \xleftarrow{(F.T)^{-1}} \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$