Zum Schluss etwas Quantenmechanik (QM)

→ TP II

QM:
- seit 100 Jahren beste Theorie zur Beschreibung der "~~Mikro~~ Mikrowelt" (= Atome, Moleküle, Elementarteilchen...")
- extrem gut bestätigt im Experiment!

QM: Was ist QM?

Zwei essentielle Merkmale:

(I) allg. Überlagerungsfähigkeit der Zustände eines physikalischen Systems

(II) physikalische Größen werden wesentlich und unvermeidbar durch ihre Messungen beeinflusst!

(I) und (II) unintuitiv und unanschaulich aber exakt formulierbar!

mittels geeigneter Mathematik!

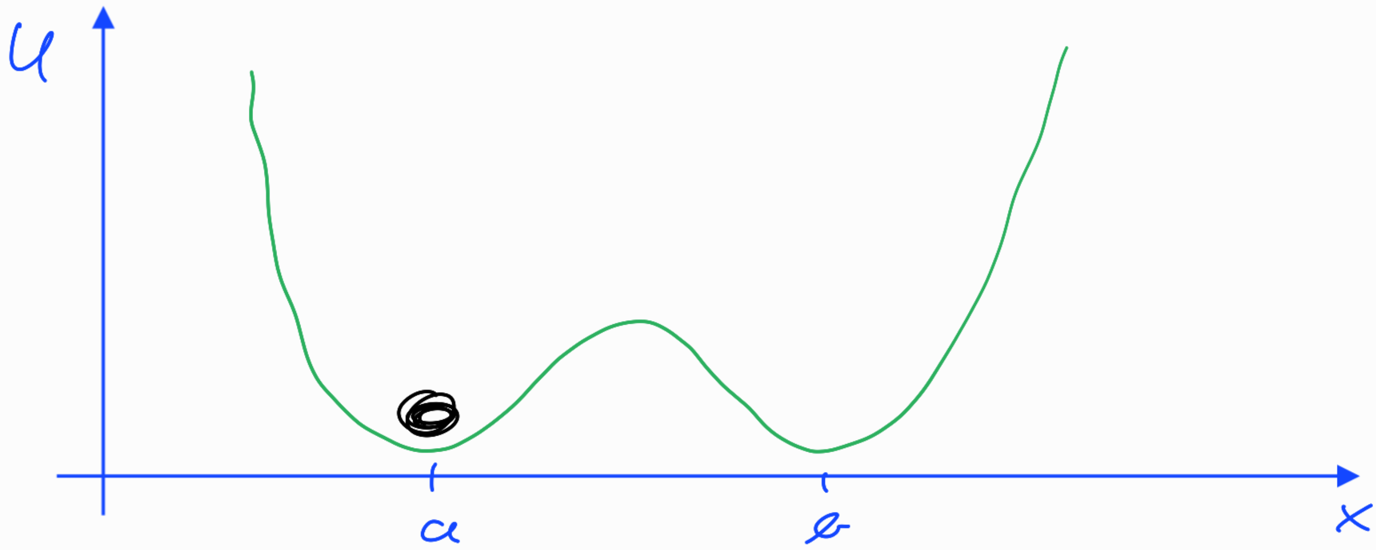
Ⅰ : Vektorraum!

Ⅱ : Skalarprodukt!

Allg. Superpositionsprinzip

(= Überlagerungsfähigkeit)

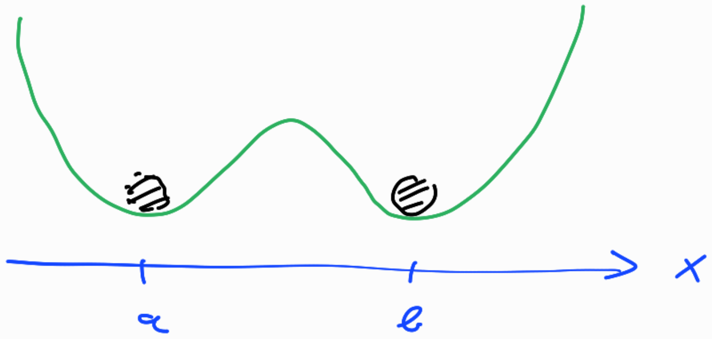
am Beispiel eines Teilchens im Doppel-muldenpotenzial:



klassische Physik: im Grundzustand

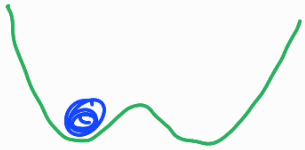
Teilchen entweder bei $x = a$ (linke Mulde) oder bei $x = b$ (rechte Mulde)

QM:



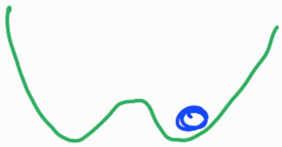
im Grundzustand Teilchen zugleich in linker Mulde und rechter Mulde!

klassisch:



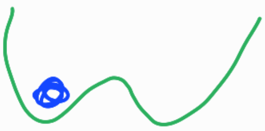
L

oder



R

QM:

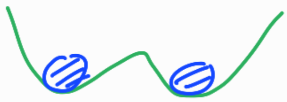


L ,

R

aber

und:



L + R !

Überlagerung (Superposition) der Zustände L und R !

QM postuliert:

$$\boxed{\text{Zustandsraum} \stackrel{!}{=} \text{komplexer Vektorraum } \mathcal{H} \text{ mit herm. Skalarprodukt}}$$

"Teilchen in linker Mulde":

$$Ⓛ \hat{=} u_\ell \in \mathcal{H}$$

← normierte Vektor.

"Teilchen in rechter Mulde":

$$Ⓡ \hat{=} u_r \in \mathcal{H} \quad , \quad |u_r| = 1$$

Vektoraddition in $\mathcal{H}$:

⤳ es gibt den Zustand

$$\boxed{u_{\ell r} \stackrel{!}{=} u_\ell + u_r} \in \mathcal{H} \quad !$$

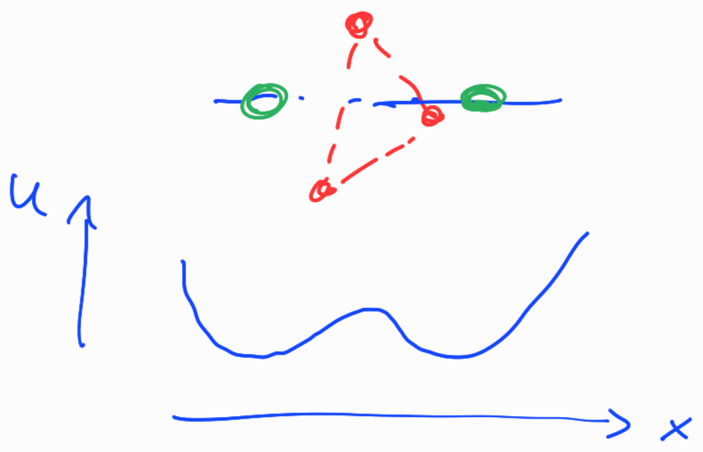
$$\hat{=} Ⓛ + Ⓡ$$

ebenso unanschaulich, aber exakt formuliert!

(II) Rolle der Messung einer Größe in der QM:

Mikroskopisches "Doppelmuldenpotential":

NH_3 - Molekül (Ammoniak):



QM: keinen direkten Zugang zur mikroskopischen Welt, sondern nur einen indirekten mittels Messungen durch geeignete Messapparaturen/-geräte!

QM macht nur Aussagen über den Ausgang von Messungen an einem System!

einfache, elementare Messungen der Art: $(u \in \mathcal{H})$

M_u : Messung ob im System der Zustand u vorliegt,

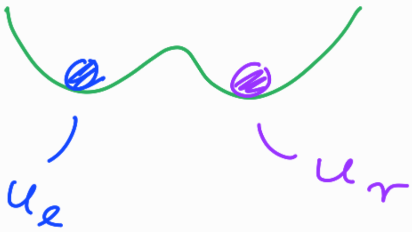
$\hat{=}$ 2 mögliche Resultate:

"Ja" $\hat{=}$ 1 = positiv

"Nein" $\hat{=}$ 0 = negativ

Ausgang der Messung M_u abhängig vom vorliegenden Zustand $v \in \mathcal{H}$.

Beispiel:



- $v = u_l$: $\quad M_{u_l}$: positiv ! (1)

  $\qquad\qquad M_{u_r}$: negativ ! (0)

- $v = u_l + u_r$: $\quad M_{u_l}$: ?

  QM: Messresultat unbestimmt! (prinzipiell!)

  aber: Wahrscheinlichkeiten für mögliche Messresultaten können exakt bestimmt werden!

QM postuliert:

Messung M_u am System im Zustand v positiv mit Wahrscheinlichkeit:

$$\boxed{P_u(v) \overset{!}{=} |\langle v, u\rangle|^2}$$

(Bornsche Regel)

am Beispiel:

- M_{u_e} <u>immer</u> positiv für $\nu = u_e$

d.h. $1 = P_{u_e}(u_e) = |\langle u_e, u_e \rangle|^2 = 1$

Bornsche Regel

- M_{u_e} <u>immer</u> negativ für $\nu = u_r$

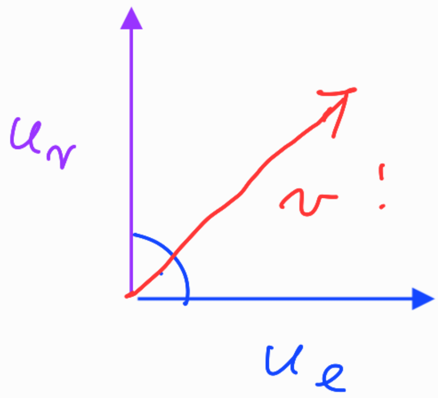
$0 = P_{u_e}(u_r) = |\langle u_r, u_e \rangle|^2 = 0!$

B. R.

$\longrightarrow \quad \langle u_r, u_e \rangle = 0 \quad !$

d.h. Zustandsvektoren u_r und u_e sind orthonormal!

→ "geometrische Bild":



$|u_e| = 1$

$|u_r| = 1$

– Messung von u_e am System im Zustand:

$$(*) \quad \underline{v} = (u_e + u_r)/\sqrt{2}$$

(normierter!) Zustandsvektor für Zustand Ⓛ + Ⓡ ...

→ positiv mit Wkt.

$$P_{u_e}(v) = |\langle v, u_e \rangle|^2$$

$$\underset{(*)}{=} \left|\left\langle \frac{u_e + u_r}{\sqrt{2}}, u_e \right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2} \; !$$

$$P_{u_r}(v) = |\langle v, u_r\rangle|^2$$

$$= \left|\left\langle \frac{u_e + u_r}{\sqrt{2}}, u_r\right\rangle\right|^2$$

$$= 1/2 \quad !$$

$\Rightarrow$ allg. Zustände:

$$v = \alpha u_e + \beta u_r$$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$P_{u_e}(v) = |\langle \alpha u_e + \beta \overset{\rightsquigarrow 0}{u_r}, u_e\rangle|^2 \quad \underbrace{u_e + \beta u_r, u_e}_{\sim 1}$$

$$= |\alpha|^2$$