Letzte Woche: Vektorraum, Vektor, Basis, Basisdarstellung, Dimension

- Vektorraum = Menge V mit Addition und Skalarmultiplikation
- Vektor = Element eines VRs
- Basis $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \in V$:

  $\rightarrow$ eindeutige Darstellung von bel. $\vec{a} \in V$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. B

- $n = \dim V$

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_B$$

$$\rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}_B, \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}_B$$

Addition:

(A1) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(A2) Existenz des $\vec{0}$-Vektors:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

(A3) Existenz des inversen Vektors $-\vec{a}$:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

(A4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Skalarmultiplikation

(S1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

Nachtrag:

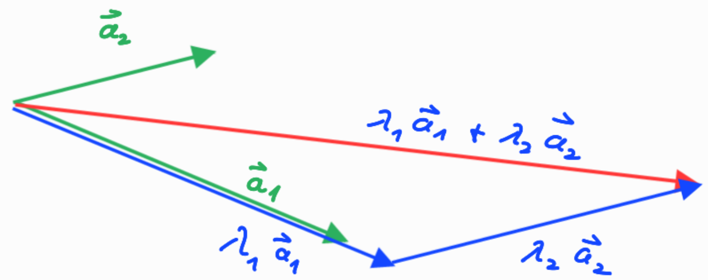
- Linearkombination
- Lineare Unabhängigkeit
- Vollständigkeit $\longrightarrow$

- <u>Linearkombination</u>

der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$

mit Skalaren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$: \quad \underline{\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \in V}$$



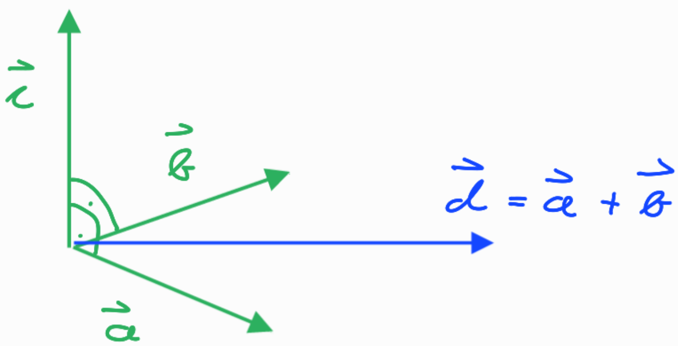
- System von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ <u>linear unabhängig</u> g.d.w.

$$\boxed{\vec{o} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \implies \lambda_i = 0}$$

(d.h. <u>nur</u> die <u>triviale</u> Linearkombination der Vekt.en $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ergibt $\vec{o}$)

- System von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ ist <u>vollständig</u> (ein Erzeugenden-System) g.d. wenn <u>jeder</u> Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dargestellt werden kann.

<u>Beispiele:</u>



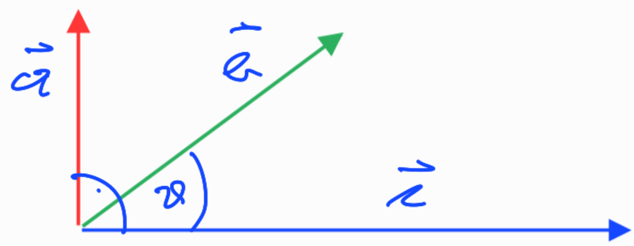
	linear unabhg.	vollständig
$\vec{a}, \vec{b}$	✓	–
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	✓	✓
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$	–	–
$\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}$	✓	✓
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	–	✓

Bem.:

Basis = vollständiges und zugleich linear unabhängiges System von Vektoren

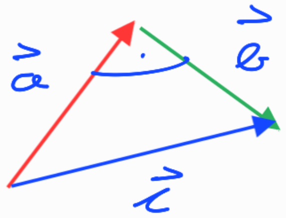
heute: "Vektoren mit Geometrie"!

z.B. Translationen:



- $\vec a \perp \vec c$
- $\sphericalangle(\vec b, \vec c) = 60° = \vartheta$
- $|\vec a| < |\vec c|$
- Gesetze der eukl. Geometrie:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Pythagoras:

$$|\vec a|^2 + |\vec b|^2 \overset{!}{=} |\vec c|^2$$

<u>eukl.</u> Geometrie für <u>allg.</u> Vektoren?

mittels

<u>Skalarprodukt</u> $\rightarrow$ geom. Grundbegriffe

$\rightarrow$ eukl. Geometrie

<u>Def:</u> Skalarprodukt eines VRs V

Das Skalarprodukt ist eine <u>Abbildung</u>

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

mit Eigenschaften

(SP1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ (Symmetrie)

(SP2) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$,

$\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$ (Positivität)

(SP3) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

$\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

Linearität

Notation: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

beachte: $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle \overset{(SP1)}{=} \langle \vec{b}, \lambda \vec{a} \rangle \overset{(SP3)}{=} \lambda \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

$\overset{(SP1)}{=} \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

analog: $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$

$\rightarrow$ geometrische Begriffe:

Norm (Länge, Betrag):

$$\boxed{|\vec{a}| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}}$$

Orthogonalität

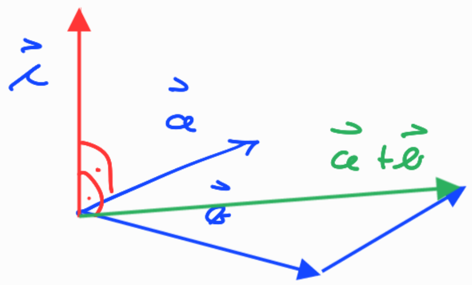
$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0}$$

„$\vec{a}$ orthogonal $\vec{b}$"

VR mit Skalarprodukt = euklidischer Vektorraum

Beispiele / Anwendungen:

1)



$$\left.\begin{array}{l} \vec a \perp \vec c \\ \vec b \perp \vec c \end{array}\right\} \longrightarrow \vec a + \vec b \perp \vec c$$

geg.:

$$\vec a \perp \vec c \longrightarrow \langle \vec a, \vec c \rangle = 0 \quad (*)$$

$$\vec b \perp \vec c \longrightarrow \langle \vec b, \vec c \rangle = 0$$

z. z.:

$$\vec a + \vec b \perp \vec c \longrightarrow \langle \vec a + \vec b, \vec c \rangle \overset{!}{=} 0$$

$$0 \overset{?}{=} \langle \vec a + \vec b, \vec c \rangle = \underbrace{\langle \vec a, \vec c \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec b, \vec c \rangle}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

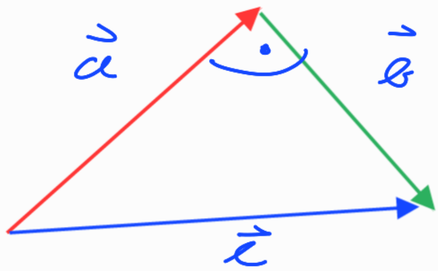
2)

$$|\lambda \vec a| = |\lambda| \, |\vec a|$$

$$|\lambda \vec a| = \left(\langle \lambda \vec a, \lambda \vec a \rangle \right)^{1/2}$$

$$= \left(\lambda^2 \langle \vec a, \vec a \rangle \right)^{1/2} = |\lambda| \, |\vec a| \quad \checkmark$$

3) Satz des Pythagoras:



z.z.: $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

geg: $\cdot\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad (1)$

$\cdot\ \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2)$

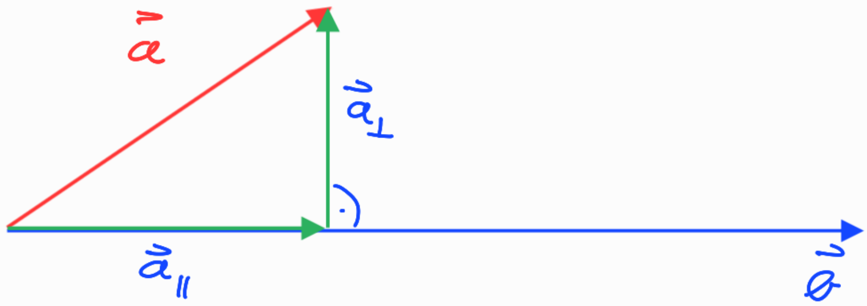
$$|\vec{c}|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \overset{(2)}{=} \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{} + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{|\vec{b}|^2}$$

$$= |\vec{a}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + |b|^2 \quad !$$

4) $\underbrace{\text{Parallel-}}_{\vec{a}_\parallel}$ und $\underbrace{\text{Orthogonalkomponente}}_{\vec{a}_\perp}$



$\vec{a}_\parallel$ und $\vec{b}_\perp$ bestimmt durch:

(1) $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$

(2) $\vec{a}_\parallel \parallel \vec{b}$ (d.h. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$)

(3) $\vec{a}_\perp \perp \vec{b}$

Beh: $\boxed{\vec{a}_\parallel \overset{!}{=} \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}}$

wobei $\hat{b} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$: "Richtungsvektor von $\vec{b}$"

(d.h.: $\vec{b} = |\vec{b}| \hat{b}$)

nach (1): $\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel$

$\vec{a}_\parallel \parallel \vec{b}$, da $\vec{a}_\parallel = \underbrace{\frac{1}{|\vec{b}|} \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle}_{\lambda} \vec{b}$

2.2 : (3) $\vec{a}_\perp \perp \vec{b} \iff \langle \vec{a}_\perp, \hat{b} \rangle = 0$

$$0 \overset{?}{=} \langle \vec{a}_\perp, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{a}_\parallel, \vec{b} \rangle$$

$$= \langle \vec{a} - \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}, \vec{b} \rangle$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \hat{b}, \vec{b} \rangle$$

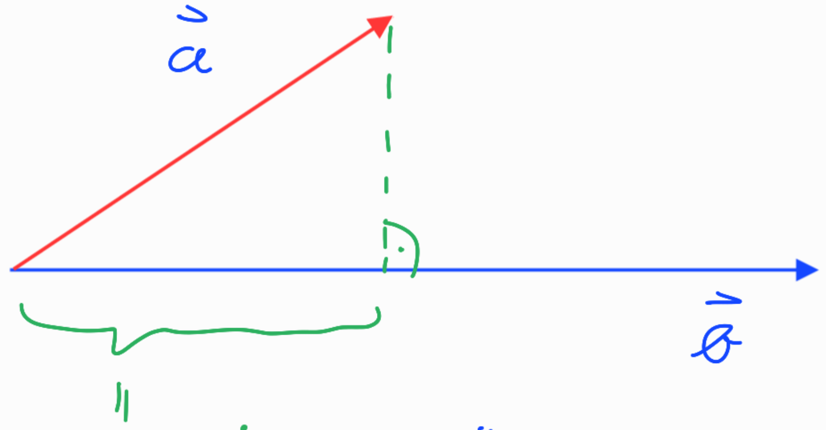
$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle \underbrace{\langle \hat{b}, \vec{b} \rangle}_{\frac{1}{|\vec{b}|} \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{|\vec{b}|^2} = |\vec{b}|}$$

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - |\vec{b}| \langle \vec{a}, \hat{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \underbrace{|\vec{b}| \hat{b}}_{= \vec{b}} \rangle$$

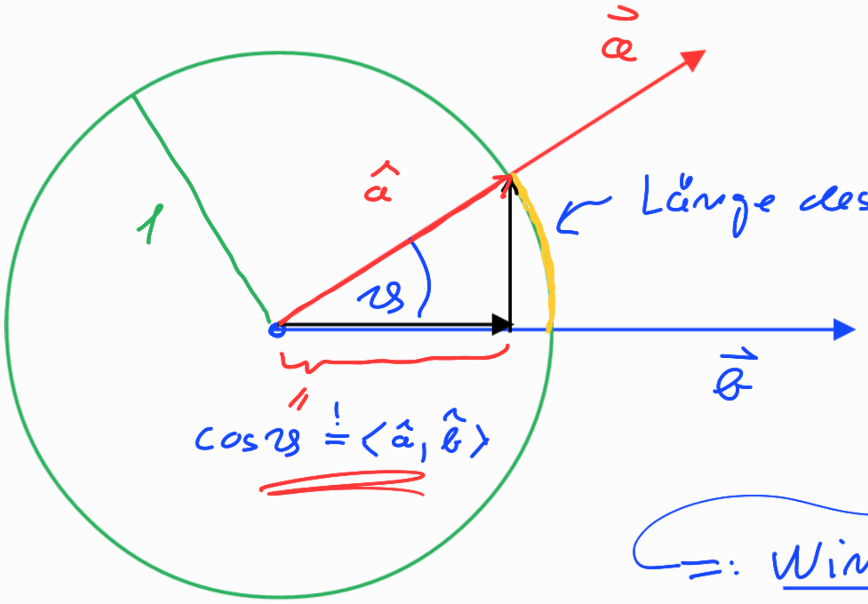
$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \overset{!}{=} 0 \; !$$

$\Rightarrow$ geometrische Deutung des S.P.:



$\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle$ = "Länge der Projektion"

- Def. des Winkels zwischen Vektoren:



Länge des Kreisbogens

=: Winkel ϑ im Bogenmaß

$$\left[\begin{array}{ccc} 360^\circ & \hat{=} & 2\pi \\ 180^\circ & \hat{=} & \pi \\ 90^\circ & \hat{=} & \pi/2 \\ & \vdots & \end{array}\right]$$

$$\boxed{\cos\vartheta := \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

Def: <u>Orthonormalbasis</u> (ONB)

Eine Basis B eines euklidischen Vektorraums besteht aus Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ die

> 1) von <u>Norm</u> 1,
>
> 2) paarweise <u>orthogonal</u> sind

d.h. • $|\vec{e}_i| = 1$ für alle i

• $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ für alle $i \neq j$

mittels S.P.: • $\boxed{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1}$

• $\boxed{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0}$ $i \neq j$

mittels Kronecker-Symbol δ_{ij}:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow$: $\boxed{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}}$