Vektor, <u>Vektorraum</u>, <u>Skalarprodukt</u>, Vektorprodukt

$(V, \text{„}+\text{"}, \text{„}\lambda\cdot\text{"})$ $\qquad\qquad \langle \ldots, \ldots \rangle$

A1 – A4

S1 – S4

Geometrie:

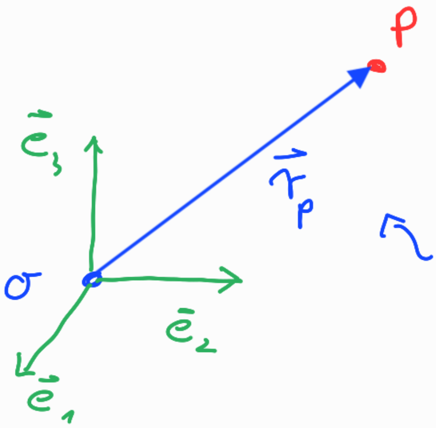
- $\vec{a} \perp \vec{b} \quad :\iff \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$
- $|\vec{a}| := \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{1/2}$

<u>heute</u>: <u>Koordinatensysteme</u> (für den 3D-Raum)

<u>kartesisches Koordinatensystem</u>

R. Descartes (1596–1650) $\hat{=}$ Cartesius

- Bezugspunkt O
- ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



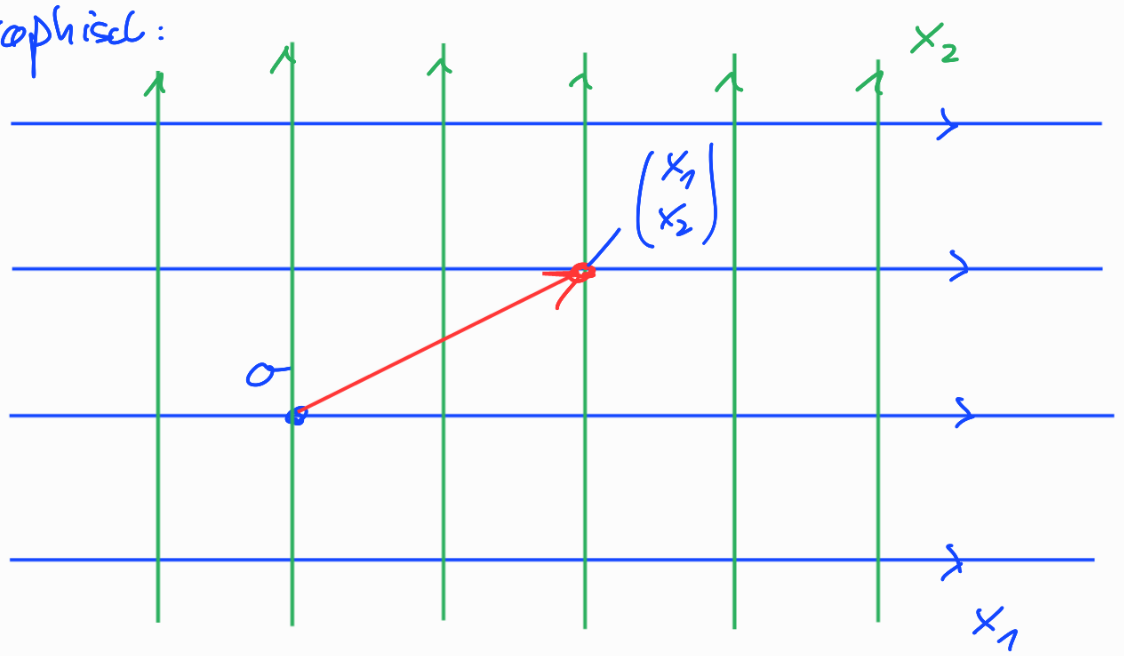
$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ = Ortsvektor von P (bzgl. O)

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$$

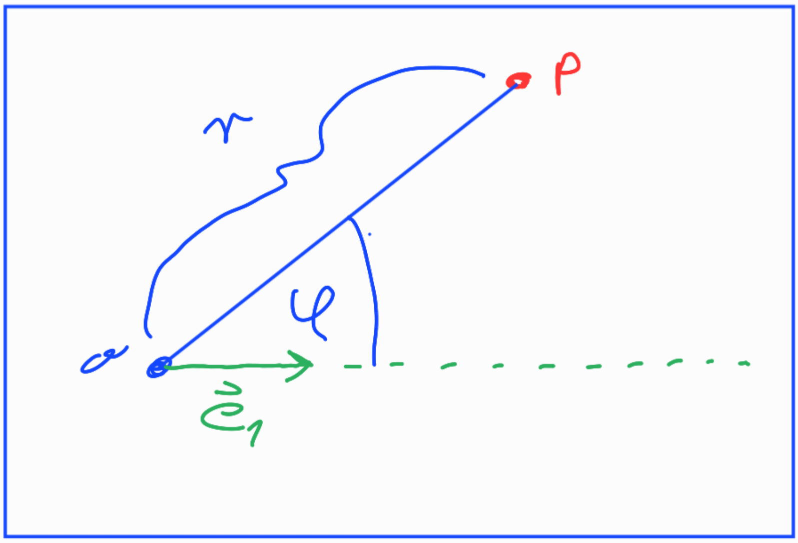
kart. Koordinaten von P (bzgl. O und B)

(2 D)

graphisch:



Polarkoordinaten (für Ebene)

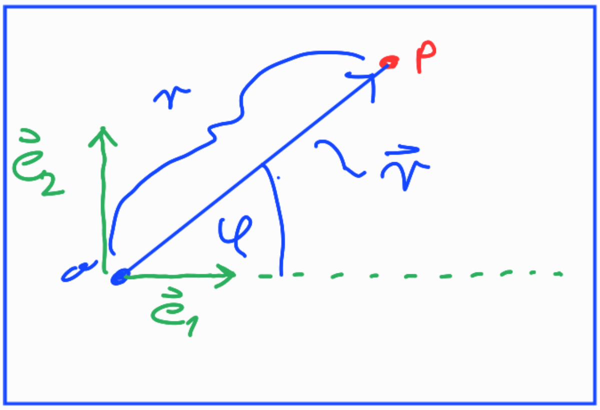


- Bezgs. pkt o
- Richtung $\vec{e}_1$

Polarkoordinaten von P (bzgl. $o, \vec{e}_1$):

- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
- (Azimuth-) Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$

$\Big\} \longrightarrow \underline{(r, \varphi)}$

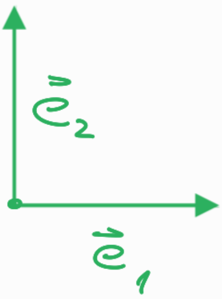


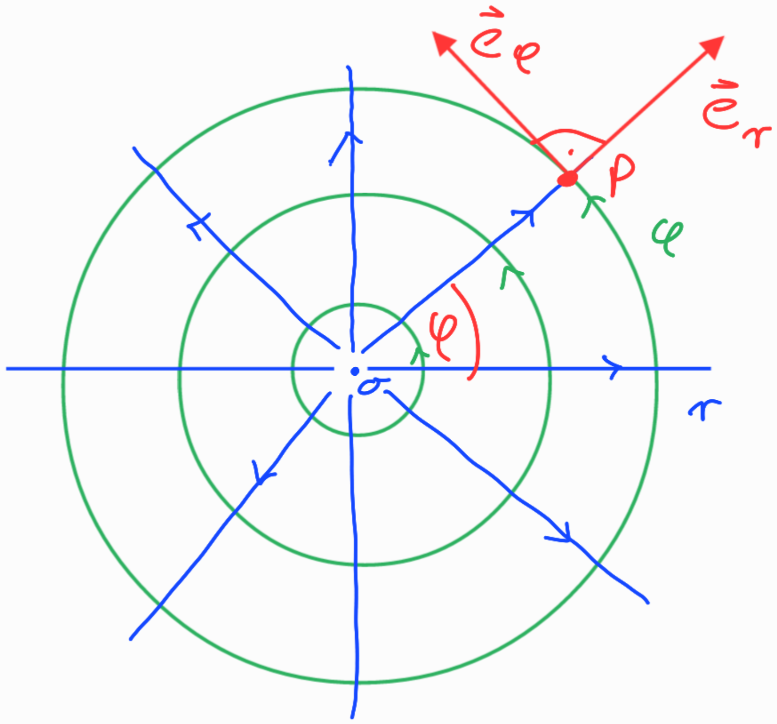
$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

Wechsel zu kart. Koordinaten (bzg. O, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)

$$(r, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

graphisch:





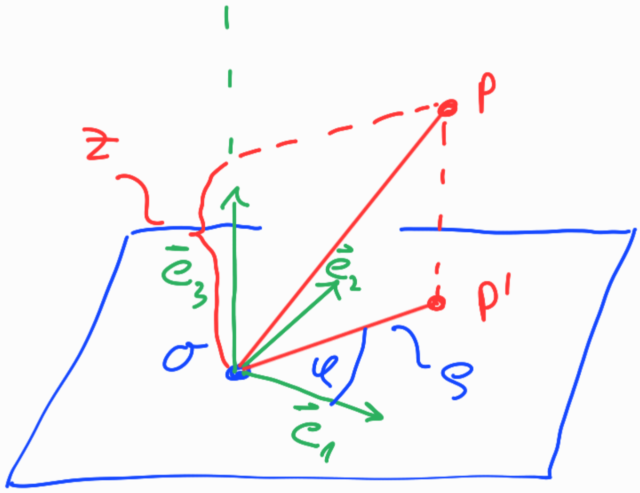
<u>Lokale ONB</u>

$$B_{r,\varphi} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten

- Bezugspkt. $\mathcal{O}$
- ONB $B=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



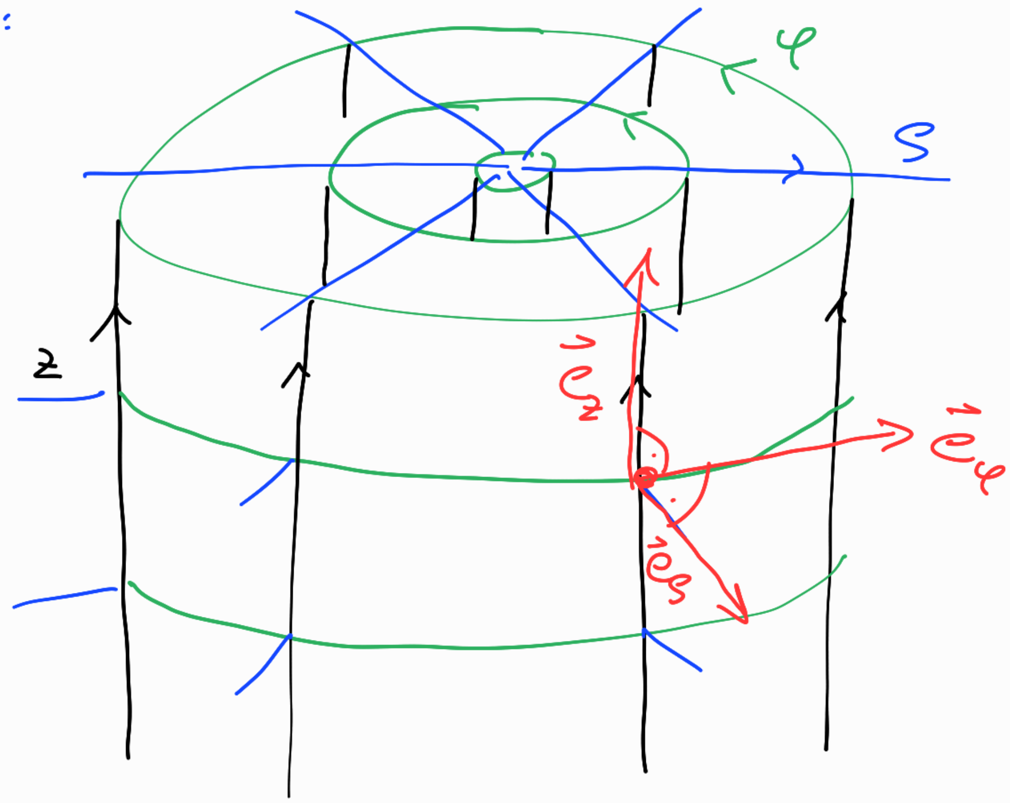
Zylinderkoordinaten von P

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Radius } \rho \in \mathbb{R}_+ \\ \bullet\ \text{(Azimuth) Winkel } \varphi \in [0, 2\pi[\\ \bullet\ \text{Höhe } z \end{array}\right\} \quad (\rho, \varphi, z)$$

Wechsel zu kart. Koord.:

$$(\rho, \varphi, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

graphisch:

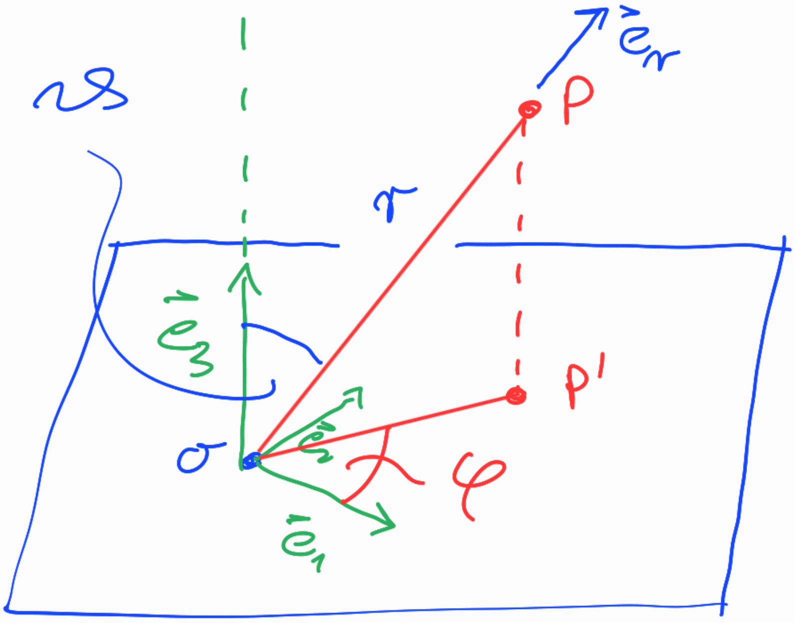


lokale ONB $\qquad B_{\varrho,\varphi,z} = (\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: $\qquad \vec{r} = \varrho\, \vec{e}_\varrho + z\, \vec{e}_z$

Kugelkoordinaten (sphärische Koordinaten)



- Bzg. pkt O
- ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Kugelkoord. von P

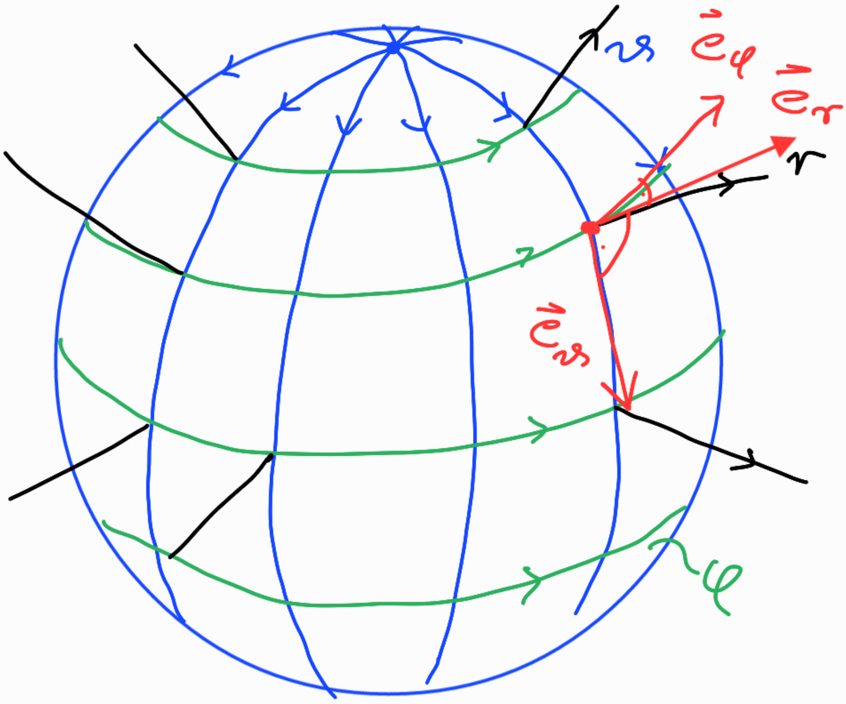
- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
- Azimuthalwinkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- Polarwinkel $\vartheta \in [0, \pi]$

$\rightarrow (r, \varphi, \vartheta)$

Wechsel auf kart. Koord

$$(r, \varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

graphisch:



Lokale Basis:

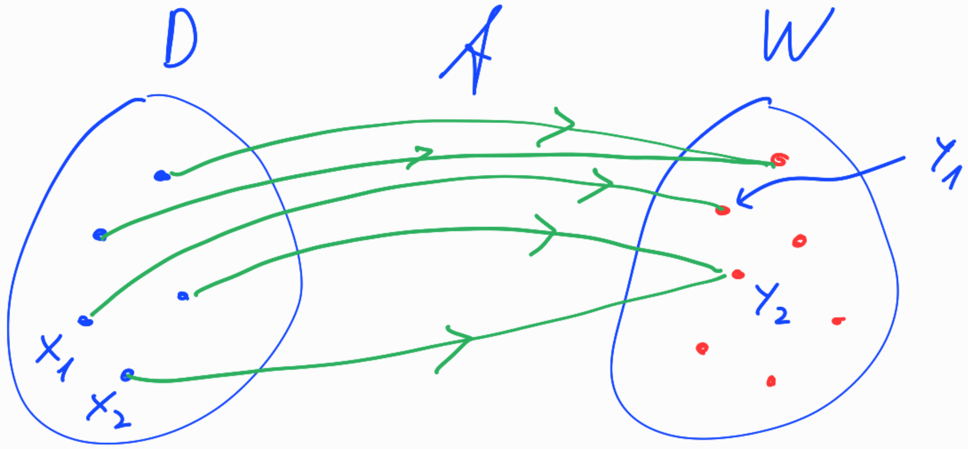
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Elemente der Analysis (zuerst 1D, dann $\mathbb{R}^n$)

Abbildung:

A



Notation:

$$A : D \longrightarrow W$$

$$x_i \longmapsto A(x_i) = y_i$$

↑ Zuordnungsvorschrift

reelle Funktion $f :=$ Abbildung $f: D \to W$

$$D \subset \mathbb{R}, \quad W \subset \mathbb{R}$$

Beispiele:

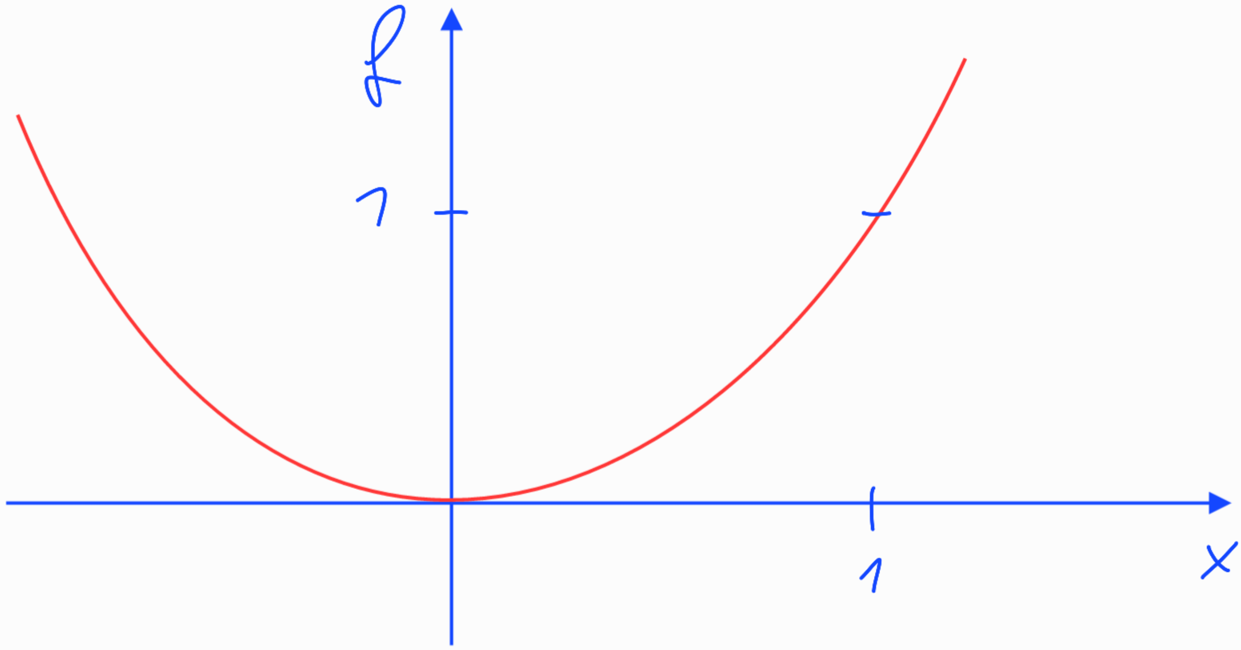
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

kürzer: $f: x \mapsto x^2$

noch kürzer: $f(x) = x^2$

Funktionsgraph von $f(x) = x^2$:



<u>Verknüpfungen von Funktionen:</u> $f, g : D \to \mathbb{R}$

<u>Addition</u>

$$f + g : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

<u>Skalarmultiplikation</u>

$$\lambda f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

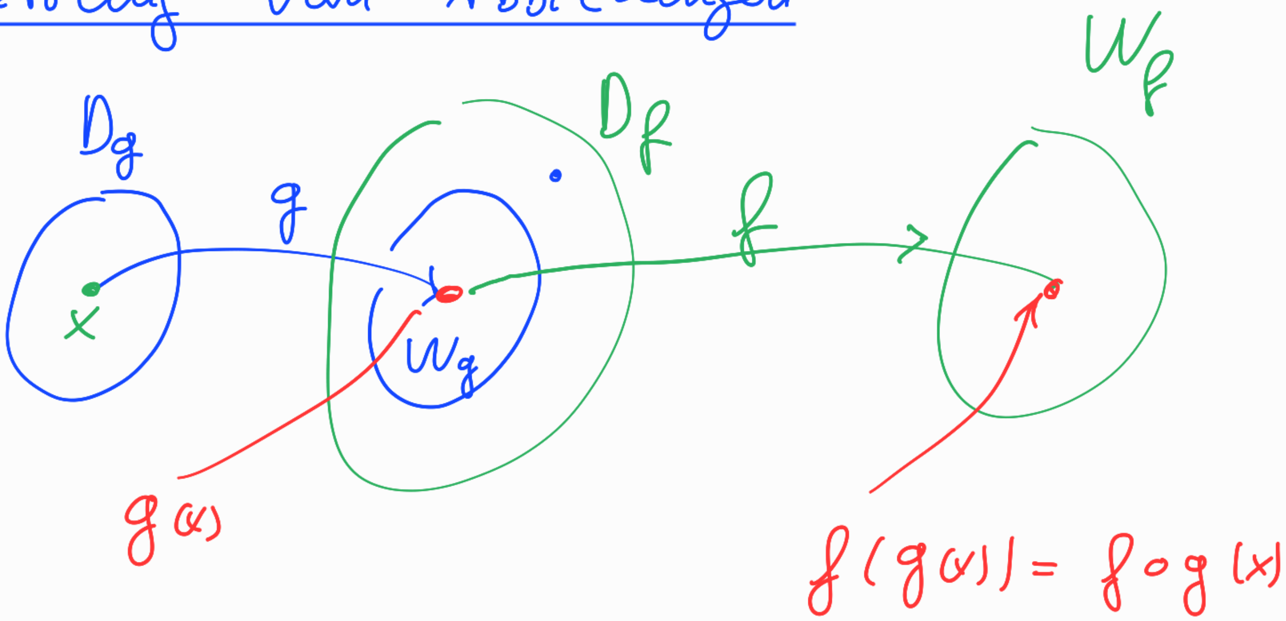
<u>Multiplikation</u>

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$$

<u>Division</u> : $f/g : D \setminus \underset{g}{\text{Nullstellen von}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Verkettung von Abbildungen



$$f \circ g : D_g \longrightarrow W_f$$

$$x \longmapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

„Verkettung / Komposition der Abb. f und g"

„f nach g".